4. Mulțimea numerelor raționale
4.1 Numere raționale pozitive

1. Fracții

Se numește **fracție** o pereche de numere naturale a și b, $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$.

Orice fracție reprezintă un număr, care se numește **număr fracționar**. Prin abuz de limbaj vom folosi cuvântul fracție pentru a desemna un număr.

Exemple. Fracții sunt: $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{11}{5}, \frac{7}{7}, \cdots$.

2. Fracții subunitare, echiunitare și supraunitare

a) Fracția $\frac{a}{b}$ este **subunitară**, dacă $a < b, b \neq 0$.

Exemple. Fracțiile: $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{11}$ sunt subunitare.

b) Fracția $\frac{a}{b}$ este **echiunitară**, dacă $a = b, b \neq 0$.

Exemple. Fracțiile: $\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{11}{11}$ sunt echiunitare.

c) Fracția $\frac{a}{b}$ este **supraunitară**, dacă $a > b, b \neq 0$.

Exemple. Fracțiile: $\frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{21}{11}$ sunt supraunitare.

3. Fracții echivalente

Două fracții $\frac{a}{b}, b \neq 0$ și $\frac{c}{d}, d \neq 0$ sunt **echivalente** și scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă $ad = bc$.

Exemple. Fracțiile: $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{5}$ și $\frac{6}{10}$ sunt respectiv echivalente deoarece $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ și $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$.

4. Amplificarea fracțiilor

A **amplifica** fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu numărul natural $n, n \neq 0$ înseamnă a înmulți atât numărătorul cât și numitorul fracției cu n, adică: $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$.

Prin amplificarea unei fracții cu un număr $n, n \neq 0$ se obține o fracție echivalentă cu fracția dată.

Exemple. $\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6}$; $\frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{8}{20}$.

5. Simplificarea fracțiilor

A **simplifica** fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu numărul natural $n, n \neq 0$ înseamnă a împărți atât numărătorul cât și numitorul fracției cu n, adică: $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$.

Prin simplificarea unei fracții cu un număr $n, n \neq 0$ se obține o fracție echivalentă cu fracția dată.

Exemple. $\frac{6}{3} = \frac{6:3}{3:3} = \frac{2}{1}$; $\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}$.

6. Fracții ireductibile

Fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ se numește **ireductibilă**, dacă cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1.

Simplificând fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului fracției date, obținem o fracție ireductibilă.

Exemple. Fracțiile: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$ și $\frac{7}{11}$ sunt ireductibile, deoarece cel mai mare divizor comun al numerelor 2 și 3, 5 și 9 și respectiv 7 și 11 este 1.

Simplificând fracția $\frac{6}{10}$ prin 2, obținem fracția ireductibilă $\frac{3}{5}$.

7. Introducerea întregilor într-o fracție și scoaterea întregilor dintr-o fracție

a) Regulă la introducerea întregilor într-o fracție:

$$a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}.$$

Exemple: $2\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 5+3}{5}=\frac{13}{5}$; $3\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 9+2}{9}=\frac{29}{9}$.

b) Regulă la scoaterea întregilor dintr-o fracție:

$$\frac{a}{b}=c+\frac{d}{b}, \text{unde } a=b\cdot c+d.$$

Exemple: $\frac{13}{5}=\frac{2\cdot 5+3}{5}=2+\frac{3}{5}$; $\frac{22}{9}=\frac{2\cdot 9+4}{9}=2+\frac{4}{9}$.

8. Aducerea fracțiilor la același numitor

Mai multe fracții pot fi aduse la același numitor astfel:

a) Se determină cel mai mic multiplu comun al numitorilor.

b) Se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre cel mai mic multiplu comun al numitorilor și numitorul fracției respective.

Exemplu. Se consideră fracțiile: $\frac{5}{6},\frac{4}{5},\frac{7}{30}$.

$6=2\cdot 3, 5=5, 30=2\cdot 3\cdot 5$, iar cel mai mic multiplu comun al celor trei numitori este $2\cdot 3\cdot 5=30$. Prima fracție o amplificăm cu $30:6=5$, a doua fracție o amplificăm prin

$30:5=6$, iar a trei fracție o amplificăm prin $30:30=1$. Atunci fracțiile devin:
$\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{25}{30},\frac{4\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{24}{30},\frac{7\cdot 1}{30\cdot 1}=\frac{7}{30}$.

9. Compararea fracțiilor

a) Dacă două fracții au același numitor, mai mare este fracția care are numărătorul mai mare.

Schematic: $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Leftrightarrow a>b$.

Exemple: $\frac{11}{10}>\frac{7}{10}$, deoarece $11>7$;
$\frac{13}{15}>\frac{8}{15}$, deoarece $13>8$; $\frac{101}{25}>\frac{75}{25}$, deoarece $101>75$.

b) Dacă două fracții au același numărător, mai mare este fracția care are numitorul mai mic.

Schematic: $\frac{a}{b}>\frac{a}{c}\Leftrightarrow b<c$.

Exemple: $\frac{11}{5}>\frac{11}{7}$, deoarece $5<7$;
$\frac{23}{15}>\frac{23}{25}$, deoarece $15<25$; $\frac{111}{25}>\frac{111}{50}$, deoarece $25<50$.

c) Fiind date fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, avem: $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad>bc$.

Exemple: $\frac{15}{7}>\frac{9}{8}$, deoarece $15\cdot 8>7\cdot 9$;
$\frac{13}{3}>\frac{8}{5}$, deoarece $13\cdot 5>3\cdot 8$.

10. Adunarea și scăderea numerelor fracționare care au același numitor

Reguli: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ și $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$, $a>b$.

Proprietăți.

a) $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{b}{c}+\frac{a}{c}$ - comutativitate

b) $\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)+\frac{c}{d}=\frac{a}{d}+\left(\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)$ – asociativitate

c) $\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ - 0 este element neutru pentru adunare.

Exemple: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ și $\frac{9}{15}+\frac{3}{15}=\frac{9+3}{15}=\frac{12}{15}$.

11. Adunarea și scăderea numerelor fracționare care au numitori diferiți

a) Două numere fracționare care au numitori diferiți se **adună** astfel:

a) se aduc numerele fracționare la același numitor;

b) se adună numerele fracționare rezultate care au același numitor.

Exemplu. $\frac{2}{9}+\frac{7}{15}=\frac{2\cdot5}{9\cdot5}+\frac{7\cdot3}{15\cdot3}=\frac{10}{45}+\frac{21}{45}=\frac{10+21}{45}=\frac{31}{45}$.

b) Două numere fracționare care au numitori diferiți se **scad** astfel:

a) se aduc numerele fracționare la același numitor;

b) se scad numerele fracționare rezultate care au același numitor.

Exemplu. $\frac{13}{21}-\frac{5}{14}=\frac{13\cdot2}{21\cdot2}-\frac{5\cdot3}{14\cdot3}=\frac{26}{42}-\frac{15}{42}=\frac{11}{42}$.

Proprietăți.

a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ - comutativitate

b) $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$ – asociativitate

c) $\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ - 0 este element neutru pentru adunare.

12. Înmulțirea și împărțirea numerelor fracționare

Reguli: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}$ și $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Exemple: $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 10}=\frac{6}{50}$ și $\frac{4}{9}:\frac{2}{30}=\frac{4}{9}\cdot\frac{30}{2}=\frac{20}{3}$.

Proprietăți.

a) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$ - comutativitate

b) $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$ – asociativitate

c) $\frac{a}{b}\cdot 1=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ - 1 este element neutru pentru înmulțire.

d) $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$ - înmulțirea este distributivă față de adunare

13. Puterea unui număr fracționar

Regulă: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Proprietăți.

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$;

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$ $n>m$;

c) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}$;

d) $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$.

Exemple. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$.

14. Fracții zecimale

a) Orice număr scris sub forma $a,bcd\cdots$ se numește **fracție zecimală** sau **număr zecimal**.

a se numește partea întreagă, b reprezintă zecimile, c sutimile, d miimile, etc.

Exemple. 12,35; 4,23; 125,244, $\cdots$.

b) Fracția zecimală care are un grup de zecimale, numit perioadă, care se repetă continuu, perioada începând imediat după virgulă se numește **fracție zecimală periodică simplă**.

Exemple. 0,333$\cdots$ =0,(3); 0,121212$\cdots$ =0,(12).

c) Fracția zecimală periodică, a cărei perioadă nu urmează imediat după virgulă se numește **fracție periodică mixtă**.

Exemple. 0,1666$\cdots$ =0,1(6); 0,5212121$\cdots$ =0,5(21).

d) Orice fracție ordinară se transformă în fracție zecimală

prin împărțirea numărătorului la numitor.

Exemple: $\frac{1}{2}$ = 0,5; $\frac{1}{3}$ = 0,(3); $\frac{23}{18}$ = 1,2(7).

e) O **fracție zecimală** simplă se transformă în fracție ordinară astfel: scriem cifrele numărului la numărător, iar la numitor scriem o putere a lui 10 cu exponentul egal cu numărul de zecimale.

Exemple. 0,125 = $\frac{125}{10^3} = \frac{125}{1000}$; 3,25 = $\frac{325}{100}$.

f) O **fracție zecimală periodică simplă** se transformă în fracție ordinară astfel: scriem cifrele perioadei la numărător, iar la numitor scriem atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

Exemple. $0,(3) = \frac{3}{9}$; $3,(12) = 3\frac{12}{99}$.

g) O **fracție zecimală periodică mixtă** se transformă în fracție ordinară astfel: scriem la numărător numărul de după virgulă din care scădem neperioada, iar la numitor scriem atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada, urmat de atâtea cifre de 0 câte cifre are neperioada.

Exemple. $3,1(3) = 3\frac{13-1}{90} = 3\frac{12}{90}$; $1,1(25) = 1\frac{125-1}{990} =$ $= 1\frac{124}{990}$.

15. Operații cu fracții zecimale finite

a) Adunarea și scăderea

La adunarea și scăderea fracțiilor zecimale finite, numerele trebuie așezate respectându-se ordinul fiecărei cifre și apoi se efectuează operația cerută.

Exemple.

$$\begin{array}{r} 12,52\ + \\ \underline{3,74} \\ 16,26 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18,65- \\ \underline{4,34} \\ 14,31 \end{array}$$

b) Înmulțirea și împărțirea

- La înmulțirea unei fracții zecimale finite cu 10, 100, 1000 se deplasează virgula peste 1, 2, 3 cifre către dreapta.

Exemple. $2,32 \cdot 10 = 23,2; 15,125 \cdot 100 = 1512,5.$

- La înmulțirea fracțiilor zecimale finite, efectuăm înmulțirea obișnuită și punem virgula de la dreapta spre stânga peste un număr de cifre egal cu numărul zecimalelor celor doi factori.

$$\begin{array}{r} 12,35\cdot \\ \underline{2,5} \\ 6175 \end{array}$$

2470

30,875

- La împărțirea unei fracții zecimale finite cu 10, 100, 1000 mutăm virgula peste 1, 2, 3 cifre către stânga.

Exemple: $12{,}75 : 10 = 1{,}275$; $1250{,}56 : 1000 = 1{,}25056$.

- La împărțirea unei fracții zecimale finite cu un număr natural, se face normal împărțirea, punând la cât virgula în momentul în care coborâm prima zecimală.

$$
\begin{array}{l|l}
96{,}25 & 7 \\
\underline{7} & 13{,}75 \\
26 & \\
\underline{21} & \\
52 & \\
\underline{49} & \\
35 & \\
\underline{35} & \\
== &
\end{array}
$$

16. Mulțimea numerelor raționale pozitive

Fiind dată fracția $\frac{a}{b}$, mulțimea fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{a}{b}$ se numește număr rațional.

Exemple: Fracțiile echivalente: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ reprezintă același număr rațional.

Mulțimea numerelor raționale pozitive este mulțimea:

$$\mathbf{Q}_{+} = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b}, a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}^{*} \right\}.$$

17. Aplicații

1. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{\overline{x1}}{\overline{4x}}$, știind că *x* este divizor al lui 4.

Soluție. Divizorii lui 4 sunt: 1, 2, 4, iar fracțiile sunt: $\frac{11}{41}, \frac{21}{42}, \frac{41}{44}$.

2. Determinați valorile naturale ale lui *x*, astfel încât fracția $\frac{x+3}{7}$ să fie subunitară.

Soluție. Fracția $\frac{x+3}{7}$ este subunitară, dacă $x + 3 < 7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. Determinați fracția $\frac{a}{b}$ echivalentă cu $\frac{3}{2}$, știind că $a - b = 3$.

Soluție. $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a = 3b$. Însă $a - b = 3 \Rightarrow a = b + 3$.

Atunci: $2(b + 3) = 3b \Rightarrow 2b + 6 = 3b \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = b + 3 =$

$= 6 + 3 = 9$. Fracția este: $\frac{9}{6}$.

4. Să se determine fracțiile de forma $\frac{\overline{2x}}{\overline{4x}}$, care se simplifică și după simplificare se obține fracția $\frac{5}{9}$.

Soluție. $\frac{\overline{2x}}{\overline{4x}} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{20+x}{40+x} = \frac{5}{9} \Rightarrow 9(20 + x) = 5(40 + x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 180 + 9x = 200 + 5x \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$. Fracția este $\frac{25}{45}$.

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. Relații între puncte, drepte, plane

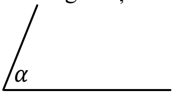
1.1 Puncte, drepte, plane ; determinarea dreptei, determinarea planului

1. Punctul, dreapta și **planul** sunt noțiuni fundamentale ale geometriei în spațiu.

Punctul se notează cu litere mari de tipar: $A, B, C, \cdots$ și se reprezintă: $\bullet\, A$ sau $\bullet\, B$ sau $\bullet\, C$, $\cdots$.

Dreaptă se poate desena cu ajutorul unei rigle și este nemărginită. Ea se poate nota cu litere mici $a, b, c, \cdots$ sau prin citirea a două puncte de pe ea $AB, BC, \cdots$.

Planul îl putem considera ca o suprafață nemărginită în toate direcțiile, îl notăm cu litere grecești mici $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ și îl reprezentăm:



2. Două puncte diferite determină o dreaptă.

Exemplu. Punctele $A, B, A \neq B$ determină dreapta AB.

3. Trei puncte necoliniare determină un plan.

Exemplu. Punctele necoliniare A, B, C determină planul (A, B, C).

4. O dreaptă și un punct exterior dreptei determină un plan.

Exemplu. Dreapta a și punctul $A \notin a$ determină planul (a, A).

5. Două drepte concurente determină un plan.

Exemplu. Dreptele $a, b, a \cap b \neq \emptyset$ determină planul (a, b).

6. Două drepte paralele determină un plan.

Exemplu. Dreptele $a, b, a || b$ determină planul (a, b).

1.2 Unghiul a două drepte în spațiu; drepte perpendiculare

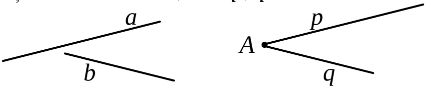
1. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt

congruente sau suplementare.

2. Prin **unghiul a două drepte concurente** înțelegem unghiul ascuțit sau drept făcut de cele două drepte, având vârful în punctul de intersecție al dreptelor.

3. Prin **unghiul a două drepte în spațiu** înțelegem unghiul ascuțit sau drept, care are vârful în orice punct din spațiu și laturile paralele cu dreptele date.

Exemplu. Fiind date în spațiu dreptele a și b, atunci alegem un punct A în spațiu, ducem prin A dreptele $p||a$ și $q||b$ și atunci avem: $\widehat{a,b} \equiv \widehat{p,q}$.



4. Două drepte din spațiu sunt perpendiculare, dacă măsura unghiului format de cele două drepte este 90^{o}.

5. Fie un punct A și o dreaptă $a, A \notin a$ și $AD \perp a$. Atunci distanța de la punctul A la dreapta a este $\mathrm{d}(A,a) = \mathrm{d}(A,D)$.

Remarcă. Dacă $A \in a$, atunci $\mathrm{d}(A,a) = 0$.

1.3 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan, dreaptă perpendiculară pe un plan, distanța de la un punct la un plan

1. O dreaptă care are un singur punct comun cu un plan se numește **secantă** acelui plan.

2. Fiind date dreapta a și planul α, $a \not\subseteq \alpha$, spunem că dreapta a este **paralelă** cu α, și notăm $a||\alpha$, dacă $a \cap \alpha = \emptyset$.

3. Teoremă. O dreaptă paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan este paralelă cu planul sau este inclusă în plan.

4. O dreaptă este **perpendiculară pe un plan** dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.

5. Teoremă. O dreaptă perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan este perpendiculară pe plan.

6. Fie un punct A și un plan $\alpha, A \notin \alpha$ și $AD \perp \alpha, D \in \alpha$.

Atunci distanța de la punctul A la planul α este $\mathrm{d}(A, \alpha) = \mathrm{d}(A, D)$.

Remarcă. Dacă $A \in \alpha$, atunci $\mathrm{d}(A, \alpha) = 0$.

1.4 Pozițiile relative a două plane; plane paralele; distanța dintre două plane paralele

1. Două plane care au o dreaptă comună se numesc plane **secante.**

2. Fiind date două plane α și β, spunem că ele sunt **paralele** și notăm $\alpha||\beta$, dacă $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

3. Teoremă. Două plane sunt paralele dacă două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu celălalt plan.

4. Fie α și β două plane, a și b două drepte, $a||b$ astfel încât $a \subset \alpha$ și $b \subset \beta$. Dacă $\alpha \cap \beta = c$, atunci $c||a$ și $c||b$.

5. Fie o dreaptă a și două plane α și β astfel încât $a \subset \beta$, $a||\alpha$ și $\alpha \cap \beta = b$. Atunci $a||b$.

6. Fie α un plan, a o dreaptă $a||\alpha$, $A \in \alpha$, iar b dreapta ce trece prin A și $b||a$. Atunci $b \subset \alpha$.

7. Fie α, β două plane, astfel încât $\alpha || \beta$ și γ un alt plan astfel încât $\alpha \cap \gamma = a$ și $\beta \cap \gamma = b$. Atunci $a || b$.

8. Fie α, β, γ trei plane distincte două câte două. Dacă $\alpha || \beta$ și $\beta || \gamma$, atunci $\alpha || \gamma$.

9. Cel puțin trei plane paralele determină pe două drepte oarecare pe care le intersectează segmente respectiv proporționale.

10. Fie α și β două plane paralele și a o dreaptă perpendiculară pe α și β în punctele *A* și respectiv *B*. Atunci distanța dintre planele α și β este $\mathrm{d}(\alpha, \beta) = \mathrm{d}(A, B)$.

1.5 Aplicații

a) Consideraţi un plan α, patru puncte $A, B, C, D \in \alpha$ şi punctul *F* exterior planului. Uniţi între ele punctele.

Determinaţi numărul minim de drepte şi numărul maxim de
drepte care se formează.

Soluție. − Dacă A, B, C, D sunt coliniare, atunci obţinem dreptele AB, FA, FB, FC, FD şi deci numărul minim de drepte este 5.

− Dacă oricare 3 puncte dintre punctele A, B, C, D nu sunt coliniare, atunci obţinem dreptele $AB, AC, AD, BC, BD, CD, FA, \quad FB, FC, FD$, adică 10 drepte. Deci numărul maxim de drepte este 10.

b) Fie d o dreaptă şi A, B două puncte exterioare dreptei d. Să se stabilească câte plane distincte pot fi determinate de cele două puncte şi de dreaptă.

Soluție. − Dacă $AB \| d$, luăm $\alpha = (AB, d)$;

− Dacă $AB \cap d = \{M\}$, luăm $\alpha = (A, d)$;

− Dacă AB şi d, sunt necoplanare luăm $\alpha = (A, d)$ şi $\beta = (B, d)$.

c) Se consideră trei puncte $A, B, C \in \alpha$ necoliniare şi un plan β. Să se determine un punct $M \in \alpha \cap \beta$ astfel încât $MA = MB = MC$.

Soluție. Fie *O* centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci $MA = MB = MC$. Dacă d este dreapta ce trece prin *O* şi este perpendiculară pe α atunci pentru orice $M \in \alpha$ avem: $MA = MB = MC$, deoarece $\Delta MOA \equiv \Delta MOB \equiv \Delta MOC$. Avem două situaţii:

− Dacă $d \cap \beta = \{M\}$ atunci *M* este punctul căutat;

− Dacă $d \cap \beta = \emptyset$ atunci problema nu are soluţii.

d) Fie *ABCD* şi $ABEF$ două paralelograme situate în plane diferite. Să se demonstreze că $CD||(ABEF)$.

Soluție. Avem $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (ABEF)$.

e) Fie *ABCD* un paralelogram şi α un plan astfel încât $A, B, C, D \notin \alpha, AB||\alpha$.

Să se demonstreze că $CD||\alpha$.

Soluție. Fie $\beta = (ABCD)$ şi $d = (ABCD) \cap \alpha$. Rezultă că $AB \parallel d$. Însă $CD \parallel AB$ şi atunci $CD \parallel d$ şi deci $CD \parallel \alpha$

f) Fie *ABCD* un paralelogram, *O* intersecţia diagonalelor sale, *M* un punct exterior planului (ABC) şi *N* mijlocul segmentului (AM).

Să se demonstreze că $CM||(BND)$.

Soluție. În triunghiul ACM, ON este linie mijlocie. Atunci $ON \parallel CM$. Cum $ON \subset (BND)$ rezultă că $CM \parallel (BND)$.

g) Fie *ABC* un triunghi dreptunghic în A şi M un punct arbitrar pe perpendiculara în B pe planul (ABC). Ducem $BE\perp MA$.

Să se demonstreze că:

1) $MA\perp AC$ 2) $AC\perp BE$.

Soluție. 1) $MB\perp(ABC) \Rightarrow MB\perp AC$ şi cum $AB\perp AC$ rezultă că $AC\perp(MAB) \Rightarrow AC\perp MA$.

2) Conform 1) $AC\perp(MAB) \Rightarrow AC\perp BE$.

h) Fie *ABC* un triunghi un triunghi isoscel $(AB = AC)$, D mijlocul lui (BC) şi M un punct arbitrar pe perpendiculara în C pe planul (ABC) şi E mijlocul lui (MB). Să se demonstreze că:

1) $MD\perp AD$; 2) $AC\perp ED$; 3) $BC\perp AE$.

Soluție. 1) $MC\perp(ABC), CD\perp AD \Rightarrow MD\perp AD$.

2) *ED* este linie mijlocie în triunghiul $BCM \Rightarrow ED \parallel MC$. Însă $MC\perp(ABC)$ şi atunci $ED\perp(ABC) \Rightarrow ED\perp AC$.

3) $BC\perp ED, BC\perp AD \Rightarrow BC\perp(ADE) \Rightarrow BC\perp AE$.

i) Fie *ABCD* un paralelogram, $\{O\} = AC \cap BD, M$ un punct arbitrar în spaţiu, *N* mijlocul lui (MB) şi P mijlocul lui (MC).

Să se arate că planele (ADM) şi (ONP) sunt paralele.

Soluție. (NP) şi (NO) sunt linii mijlocii în triunghiurile MBC şi respectiv MBD. Atunci $NP \parallel BC \parallel DA$ şi $NO \parallel DM$ şi deci $(ONP) \parallel (ADM)$.

j) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ADC și respectiv *ABD*.

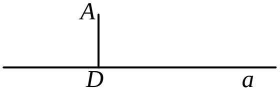
Să se demonstreze că $(G_1G_2G_3)||(ABC)$.

Soluție. Fie M mijlocul lui (CD). Atunci $G_1 \in BM$, $G_2 \in AM$ $\frac{G_1M}{G_1B} = \frac{G_2M}{G_2A} = \frac{1}{2} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$ în triunghiul *ABM*. Analog $G_1G_3 \parallel AC$, de unde $(G_1, G_2, G_3) \parallel (A, B, C)$

2. Proiecții ortogonale pe un plan

2.1 Proiecții de puncte, segmente și de drepte pe un plan; unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecției unui segment pe un plan

1. **Proiecția** unui **punct** pe o dreaptă este un punct și anume: $-$ piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe dreaptă, dacă punctul este exterior dreptei;
$-$ însuși punctul, dacă punctul aparține dreaptă.



Exemplu. Fiind dată drepta a și punctul *A*, ducem $AD \perp a$ și atunci $pr_a A = D$.

2. **Proiecția** unui **segment** $[AB]$ pe o dreaptă a este:
$-$ segmnetul $[A'B']$, unde $A' = pr_a A$ și $B' = pr_a B$, dacă AB nu este perpendiculară pe a;
$-$ punctul A', dacă $AB \perp a$.

Exemplu. Fiind dat segmentul $[AB]$ și dreapta a, ducem $AD \perp a$ și $BE \perp a$. Atunci $pr_a[AB] = [DE]$.

3. **Proiecția** unui **punct** pe un plan este un punct și anume: $-$ piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe plan, dacă punctul este exterior planului;
$-$ însuși punctul, dacă punctul aparține planului.

4. Proiecția unei drepte a pe un plan α este:
$-$ dreapta $A'B'$, unde $A' = pr_\alpha A$ și $B' = pr_\alpha B$, unde $A, B \in a$ și dreapta a nu este perpendiculară pe α;

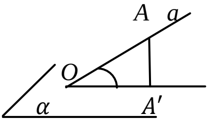
− punctul $A^{'} = pr_{\alpha} A$, dacă $d \perp \alpha$.

5. **Proiecția** unui **segment** $[AB]$ pe un plan α este:
− segmnetul $[A'B']$, unde $A' = pr_{\alpha} A$ și $B' = pr_{\alpha} B$, dacă dreapta AB nu este perpendiculară pe a;
− punctul A', dacă $AB \perp \alpha$.

6. Fiind dat segmentul $[AB]$ și planul α, astfel încât *AB* nu este perpendiculară pe α, atunci proiecția segmentului $[AB]$ pe planul α este segmentul $[A'B']$ și $A^{'}B^{'} = AB\cos(AB, A^{'}B^{'})$.

7. Unghiul făcut de o dreaptă a cu un plan α este unghiul făcut de dreaptă cu proiecția ei pe plan.

Exemplu.



$\widehat{a, \alpha} = \widehat{a, OA'}$

Aplicații.

a) Fie *ABC* un triunghi echilateral cu latura de lungime 10 cm. În punctul *A* se ridică perpendiculara pe planul (ABC) pe care se ia un punct *M* astfel încât $AM = 10$ cm.

Determinaţi unghiurile pe care le fac dreptele MA, MB şi respectiv *MC* cu planul (ABC).

Soluție. $MA \perp (ABC)$ şi atunci *MA* face cu planul (ABC) un unghi de 90°. Unghiurile făcute de dreptele *MB* şi respectiv *MC* cu planul (ABC) sunt $\widehat{MBA}$ şi respectiv $\widehat{MCA}$.

$$\text{tg}\,\widehat{MBA} = \frac{MA}{AB} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow m(\widehat{MBA}) = 45^{\circ}$$

$$\text{tg}\,\widehat{MCA} = \frac{MA}{AC} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow m(\widehat{MCA}) = 45^{\circ}.$$

b) Fie $ABCD$ un romb de latură a şi unghi ascuţit de 60°. În vârful A, obtuz se ridică o perpendiculară d pe care se ia un punct M astfel încât $MA = a$.

Determinaţi unghiurile făcute de dreptele MB, MC, MD cu planul (ABC).

Soluție. Evident ΔABC este schilateral și atunci $AB = AC = AD = a$. Însă $MA = a$ și atunci triunghiurile MAB, MAC, MAD sunt dreptunghice isoscele. Unghiurile determinate de dreptele MB, MC şi respectiv MD sunt $\widehat{MBA}, \widehat{MCA}, \widehat{MDA}$ și sunt toate egale cu 45°.

2.2 Teorema celor trei perpendiculare

1. Teoremă. Fie α un plan, A un punct, $A \notin \alpha$, a o dreaptă, $a \subset \alpha$ și $O \in \alpha$ astfel încât $AO \perp \alpha$. Dacă $OB \perp a, B \in a$, atunci $AB \perp a$.

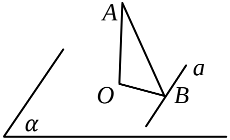


fig. 1

2. Teoremă reciprocă 1. Fie α un plan, A un punct, $A \notin \alpha$, a o dreaptă, $a \subset \alpha$ și $O \in \alpha$ astfel încât $AO \perp \alpha$. Dacă $AB \perp a, B \in a$, atunci $OB \perp a$ (fig. 1).

3. Teoremă reciprocă 2. Fie α un plan, A un punct, $A \notin \alpha$, a o dreaptă, $a \subset \alpha$ și $B \in a$ astfel încât $OB \perp a$. Dacă $AO \perp OB$, și $AB \perp a$, atunci $AO \perp \alpha$ (fig. 1).

4. Aplicații.

a) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB \perp CD$ şi $BC \perp AD$. Demonstraţi că $AC \perp BD$.

Soluție. Fie $BB'\perp CD, CC'\perp BD$ şi $DD'\perp BC$, H ortocentrul triunghiului *BCD*. Avem $BC\perp DD', BC\perp AD \Rightarrow BC\perp(ADD') \Rightarrow BC\perp AH$. Analog $CD\perp AH$ de unde rezultă $AH\perp(BCD) \Rightarrow AH\perp BD$. Însă $CC'\perp BD$ şi atunci $BD\perp(AHC) \Rightarrow BD\perp AC$.

b) În vârful *A* al triunghiului *ABC* se ridică perpendiculara *AD* pe planul său. Ducem $CE\perp AB$ şi $EF\perp BD$. Demonstraţi că $BD\perp(CEF)$.

Soluție. Avem $AD\perp(ABC) \Rightarrow AD\perp CE$ (1). Însă $CE\perp AB$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $CE\perp(ABD) \Rightarrow CE\perp BD$ (3). Avem deci: $BD\perp CE, BD\perp EF$ de unde rezultă $BD\perp(CEF)$.

2.3 Unghi diedru; unghiul dintre două plane; plane perpendiculare

1. Numim **unghi diedru** figura geometrică formată din două semiplane delimitate de aceeași dreaptă reunite cu dreapta.

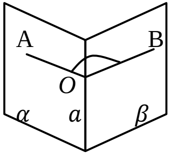


fig. 2

2. Fiind dat unghiul diedru având muchia a, numim **unghi plan** asociat acestui unghi diedru, unghiul $\widehat{AOB}$, unde $O \in a, AO\perp a, BO\perp a, OA \subset \alpha, OB \subset \beta$ (vezi fig. 2).

3. **Măsura** unui **unghi diedru** este măsura unghiului plan asociat unghiului diedru.

4. Fiind date două plane neparalele α și β, $\alpha \cap \beta = a$, $O \in a$, $OA \perp a$, $OB \perp A$, $OA \subset \alpha, OB \subset \beta$ astfel încât $m(\widehat{AOB}) << 180^o$, atunci $\widehat{AOB}$ este unghiul dintre planele α și β.

5. **Definiție**. **Două plane concurente sunt perpendiculare**, dacă unghiul determinat de aceste două plane este un unghi drept.

6. Teoremă. Fiind dat planul α și dreapta a, $a \perp \alpha$, atunci oricare ar fi planul β, astfel încât $a \subset \beta$ avem $\alpha \perp \beta$.

7. Teoremă. Fie α, β două plane perpendiculare și $a = \alpha \cap\cap \beta$. Dacă $b \subset \alpha$ și $b \perp a$, atunci $b \perp \beta$.

8. Teoremă. Fie α, β două plane perpendiculare. Atunci perpendiculara dusă dintr-un punct al unui plan pe al doilea plan este conținută în primul plan.

9. Teoremă. Două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre plane conține o dreaptă care este perpendiculară pe celălalt plan.

10. Aplicații

a) Fie punctele O, A, B, C cu proprietatea că $OA \perp OB \perp OC, OA = OB = OC$ şi D mijlocul lui (AB).

Demonstraţi că $(ABC) \perp (CDO)$.

Soluție. $OC \perp OA, OC \perp OB \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$. Triunghiul OAB este isoscel de unde rezultă $OD \perp AB$. Atunci $AB \perp (OCD), AB \subset (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (CDO)$.

b) Fie *ABCD* un pătrat de latură a, $AC \cap BD = \{O\}$. Pe planul pătratului se ridică de aceeaşi parte perpendicularele AM şi respectiv CN, astfel încât $AM = CN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Demonstraţi că $(MBD) \perp (NBD)$.

Soluție. $AM \perp (ABCD); AO \perp BD \Rightarrow MO \perp BD$.

Analog $NO \perp BD$. Cum BD este intersecţia planelor (MBD) şi (NBD), rezultă că unghiul diedru al planelor (MBD) și (NBD) este $\widehat{MON}$.

Prin calcul $MO = NO = a$ şi $MN = a\sqrt{2}$ şi deci triunghiul MON este dreptunghic în O. Atunci $m\left(\widehat{MON}\right) = 90^{\circ}$ și atunci $(MBD) \perp (NBD)$.

C U P R I N S

Algebră