

4. Mulțimea numerelor raționale

4.1 Numere raționale pozitive

1. Frații

Se numește **fracție** o pereche de numere naturale a și b , $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$.

Orice fracție reprezintă un număr, care se numește **număr fracționar**. Prin abuz de limbaj vom folosi cuvântul fracție pentru a desemna un număr.

Exemple. Frații sunt: $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{11}{5}, \frac{7}{7}, \dots$.

2. Frații subunitare, echiunitare și supraunitare

a) Frația $\frac{a}{b}$ este **subunitară**, dacă $a < b, b \neq 0$.

Exemple. Frațiile: $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{11}$ sunt subunitare.

b) Frația $\frac{a}{b}$ este **echiunitară**, dacă $a = b, b \neq 0$.

Exemple. Frațiile: $\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{11}{11}$ sunt echiunitare.

c) Frația $\frac{a}{b}$ este **supraunitară**, dacă $a > b, b \neq 0$.

Exemple. Frațiile: $\frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{21}{11}$ sunt supraunitare.

3. Frații echivalente

Două fracții $\frac{a}{b}, b \neq 0$ și $\frac{c}{d}, d \neq 0$ sunt **echivalente** și scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă $ad = bc$.

Exemple. Frațiile: $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{5}$ și $\frac{6}{10}$ sunt respectiv echivalente deoarece $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ și $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$.

4. Amplificarea fracțiilor

A **amplifica** fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu numărul natural n , $n \neq 0$ înseamnă a înmulți atât numărătorul cât și numitorul fracției cu n , adică: $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$.

Prin amplificarea unei fracții cu un număr n , $n \neq 0$ se obține o fracție echivalentă cu fracția dată.

Exemple. $\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6}$; $\frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{8}{20}$.

5. Simplificarea fracțiilor

A **simplifica** fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu numărul natural n , $n \neq 0$ înseamnă a împărți atât numărătorul cât și numitorul fracției cu n , adică: $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$.

Prin simplificarea unei fracții cu un număr n , $n \neq 0$ se obține o fracție echivalentă cu fracția dată.

Exemple. $\frac{6}{3} = \frac{6:3}{3:3} = \frac{2}{1}$; $\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}$.

6. Frații ireductibile

Fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ se numește **ireductibilă**, dacă cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1.

Simplificând fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului fracției date, obținem o fracție ireductibilă.

Exemple. Frațiunile: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$ și $\frac{7}{11}$ sunt ireductibile, deoarece cel mai mare divizor comun al numerelor 2 și 3, 5 și 9 și respectiv 7 și 11 este 1.

Simplificând fracția $\frac{6}{10}$ prin 2, obținem fracția ireductibilă $\frac{3}{5}$.

7. Introducerea întregilor într-o fracție și scoaterea întregilor dintr-o fracție

a) Regulă la introducerea întregilor într-o fracție:

$$a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}.$$

Exemple: $2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$; $3\frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 2}{9} = \frac{29}{9}$.

b) Regulă la scoaterea întregilor dintr-o fracție:

$$\frac{a}{b} = c + \frac{d}{b}, \text{ unde } a = b \cdot c + d.$$

Exemple: $\frac{13}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$; $\frac{22}{9} = \frac{2 \cdot 9 + 4}{9} = 2 + \frac{4}{9}$.

8. Aducerea fracțiilor la același numitor

Mai multe fracții pot fi aduse la același numitor astfel:

- Se determină cel mai mic multiplu comun al numitorilor.
- Se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre cel mai mic multiplu comun al numitorilor și numitorul fracției respective.

Exemplu. Se consideră fracțiile: $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{30}$.

$6 = 2 \cdot 3$, $5 = 5$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, iar cel mai mic multiplu comun al celor trei numitori este $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Prima fracție o amplificăm cu $30:6 = 5$, a doua fracție o amplificăm prin

$30:5 = 6$, iar a trei fracție o amplificăm prin $30:30 = 1$.

Atunci fracțiile devin:

$$\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}, \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{24}{30}, \frac{7 \cdot 1}{30 \cdot 1} = \frac{7}{30}.$$

9. Compararea fracțiilor

a) Dacă două fracții au același numitor, mai mare este fracția care are numărătorul mai mare.

$$\text{Schematic: } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Leftrightarrow a > b.$$

Exemple: $\frac{11}{10} > \frac{7}{10}$, deoarece $11 > 7$;

$$\frac{13}{15} > \frac{8}{15}, \text{ deoarece } 13 > 8; \quad \frac{101}{25} > \frac{75}{25}, \text{ deoarece } 101 > 75.$$

b) Dacă două fracții au același numărător, mai mare este fracția care are numitorul mai mic.

$$\text{Schematic: } \frac{a}{b} > \frac{a}{c} \Leftrightarrow b < c.$$

Exemple: $\frac{11}{5} > \frac{11}{7}$, deoarece $5 < 7$;

$$\frac{23}{15} > \frac{23}{25}, \text{ deoarece } 15 < 25; \quad \frac{111}{25} > \frac{111}{50}, \text{ deoarece } 25 < 50.$$

c) Fiind date fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, avem: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$.

Exemple: $\frac{15}{7} > \frac{9}{8}$, deoarece $15 \cdot 8 > 7 \cdot 9$;

$$\frac{13}{3} > \frac{8}{5}, \text{ deoarece } 13 \cdot 5 > 3 \cdot 8.$$

10. Adunarea și scăderea numerelor fracționare care au același numitor

Reguli: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ și $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, $a > b$.

Proprietăți.

- a) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + \frac{a}{c}$ - comutativitate
b) $\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) + \frac{c}{d} = \frac{a}{d} + \left(\frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right)$ - asociativitate
c) $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ - 0 este element neutru pentru adunare.

Exemple: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$ și $\frac{9}{15} + \frac{3}{15} = \frac{9+3}{15} = \frac{12}{15}$.

11. Adunarea și scăderea numerelor fracționare care au numitori diferiți

a) Două numere fracționare care au numitori diferiți se **adună** astfel:

- a) se aduc numerele fracționare la același numitor;
b) se adună numerele fracționare rezultate care au același numitor.

Exemplu. $\frac{2}{9} + \frac{7}{15} = \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{10}{45} + \frac{21}{45} = \frac{10+21}{45} = \frac{31}{45}$.

b) Două numere fracționare care au numitori diferiți se **scad** astfel:

- a) se aduc numerele fracționare la același numitor;
b) se scad numerele fracționare rezultate care au același numitor.

Exemplu. $\frac{13}{21} - \frac{5}{14} = \frac{13 \cdot 2}{21 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3}{14 \cdot 3} = \frac{26}{42} - \frac{15}{42} = \frac{11}{42}$.

Proprietăți.

- a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ - comutativitate
- b) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$ - asociativitate
- c) $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ - 0 este element neutru pentru adunare.

12. Înmulțirea și împărțirea numerelor fracționare

Reguli: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$ și $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Exemple: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 10} = \frac{6}{50}$ și $\frac{4}{9} : \frac{2}{30} = \frac{4}{9} \cdot \frac{30}{2} = \frac{20}{3}$.

Proprietăți.

- a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ - comutativitate
- b) $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$ - asociativitate
- c) $\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ - 1 este element neutru pentru înmulțire.
- d) $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$ - înmulțirea este distributivă față de adunare

13. Puterea unui număr fracționar

Regulă: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Proprietăți.

- a) $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$;
- b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$ $n > m$;
- c) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$;

$$d) \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n.$$

Exemple. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$.

14. Frații zecimale

a) Orice număr scris sub forma $a, bcd \dots$ se numește **fracție zecimală** sau **număr zecimal**.

a se numește partea întreagă, b reprezintă zecimile, c sutimile, d miimile, etc.

Exemple. 12,35; 4,23; 125,244, ...

b) Frația zecimală care are un grup de zecimale, numit perioadă, care se repetă continuu, perioada începând imediat după virgulă se numește **fracție zecimală periodică simplă**.

Exemple. $0,333\dots = 0,(3)$; $0,121212\dots = 0,(12)$.

c) Frația zecimală periodică, a cărei perioadă nu urmează imediat după virgulă se numește **fracție periodică mixtă**.

Exemple. $0,1666\dots = 0,1(6)$; $0,5212121\dots = 0,5(21)$.

d) Orice fracție ordinară se transformă în fracție zecimală

prin împărțirea numărătorului la numitor.

Exemple: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,(3)$; $\frac{23}{18} = 1,2(7)$.

e) O **fracție zecimală simplă** se transformă în fracție ordinară astfel: scriem cifrele numărului la numărător, iar la numitor scriem o putere a lui 10 cu exponentul egal cu numărul de zecimale.

Exemple. $0,125 = \frac{125}{10^3} = \frac{125}{1000}$; $3,25 = \frac{325}{100}$.

f) O **fracție zecimală periodică simplă** se transformă în fracție ordinară astfel: scriem cifrele perioadei la

numărător, iar la numitor scriem atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

Exemple. $0,(3) = \frac{3}{9}$; $3,(12) = 3 \frac{12}{99}$.

g) O fracție zecimală periodică mixtă se transformă în fracție ordinară astfel: scriem la numărător numărul de după virgulă din care scădem neperioada, iar la numitor scriem atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada, urmat de atâtea cifre de 0 câte cifre are neperioada.

Exemple. $3,1(3) = 3 \frac{13-1}{90} = 3 \frac{12}{90}$; $1,1(25) = 1 \frac{125-1}{990} = 1 \frac{124}{990}$.

15. Operații cu fracții zecimale finite

a) Adunarea și scăderea

La adunarea și scăderea fracțiilor zecimale finite, numerele trebuie așezate respectându-se ordinul fiecărei cifre și apoi se efectuează operația cerută.

Exemple.

$12,52 +$	$18,65 -$
$\underline{3,74}$	$\underline{4,34}$
$16,26$	$14,31$

b) Înmulțirea și împărțirea

- La înmulțirea unei fracții zecimale finite cu 10, 100, 1000 se deplasează virgula peste 1, 2, 3 cifre către dreapta.

Exemple. $2,32 \cdot 10 = 23,2$; $15,125 \cdot 100 = 1512,5$.

- La înmulțirea fracțiilor zecimale finite, efectuăm înmulțirea obișnuită și punem virgula de la dreapta spre stânga peste un număr de cifre egal cu numărul zecimalelor celor doi factori.

$$\begin{array}{r} 12,35 \cdot \\ \underline{2,5} \\ 6175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2470 \\ \hline 30,875 \end{array}$$

- La împărțirea unei fracții zecimale finite cu 10, 100, 1000 mutăm virgula peste 1, 2, 3 cifre către stânga.

Exemple: $12,75:10 = 1,275$; $1250,56:1000 = 1,25056$.

- La împărțirea unei fracții zecimale finite cu un număr natural, se face normal împărțirea, punând la cât virgula în momentul în care coborâm prima zecimală.

$$\begin{array}{r} 96,25 \quad | \quad 7 \\ \hline 7 \quad | \quad 13,75 \\ \hline 26 \\ \hline 21 \\ \hline 52 \\ \hline 49 \\ \hline 35 \\ \hline 35 \\ \hline == \end{array}$$

16. Mulțimea numerelor raționale pozitive

Fiind dată fracția $\frac{a}{b}$, mulțimea fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{a}{b}$ se numește număr rațional.

Exemple: Frațiile echivalente: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ reprezintă același număr rațional.

Mulțimea numerelor raționale pozitive este mulțimea:

$$\mathbf{Q}_+ = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

17. Aplicații

1. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{\overline{x1}}{4x}$, știind că x este divizor al lui 4.

Soluție. Divizorii lui 4 sunt: 1, 2, 4, iar fracțiile sunt:

$$\frac{11}{41}, \frac{21}{42}, \frac{41}{44}.$$

2. Determinați valorile naturale ale lui x , astfel încât fracția $\frac{x+3}{7}$ să fie subunitară.

Soluție. Frația $\frac{x+3}{7}$ este subunitară, dacă $x + 3 < 7 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. Determinați fracția $\frac{a}{b}$ echivalentă cu $\frac{3}{2}$, știind că $a - b = 3$.

Soluție. $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a = 3b$. Însă $a - b = 3 \Rightarrow a = b + 3$.

Atunci: $2(b + 3) = 3b \Rightarrow 2b + 6 = 3b \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = b + 3 =$

$= 6 + 3 = 9$. Frația este: $\frac{9}{6}$.

4. Să se determine fracțiile de forma $\frac{\overline{2x}}{4x}$, care se simplifică și după simplificare se obține fracția $\frac{5}{9}$.

Soluție. $\frac{\overline{2x}}{4x} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{20+x}{40+x} = \frac{5}{9} \Rightarrow 9(20+x) = 5(40+x) \Rightarrow \Rightarrow 180 + 9x = 200 + 5x \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$. Frația este $\frac{25}{45}$.

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. Relații între puncte, drepte, plane

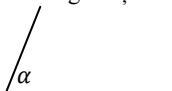
1.1 Puncte, drepte, plane ; determinarea dreptei, determinarea planului

1. Punctul, dreapta și planul sunt noțiuni fundamentale ale geometriei în spațiu.

Punctul se notează cu litere mari de tipar: A, B, C, \dots și se reprezintă: $\bullet A$ sau $\bullet B$ sau $\bullet C, \dots$.

Dreaptă se poate desena cu ajutorul unei rigle și este nemărginită. Ea se poate nota cu litere mici a, b, c, \dots sau prin citirea a două puncte de pe ea AB, BC, \dots .

Planul îl putem considera ca o suprafață nemărginită în toate direcțiile, îl notăm cu litere grecești mici $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ și îl reprezentăm:



2. Două puncte diferite determină o dreaptă.

Exemplu. Punctele $A, B, A \neq B$ determină dreapta AB .

3. Trei puncte necoliniare determină un plan.

Exemplu. Punctele necoliniare A, B, C determină planul (A, B, C) .

4. O dreaptă și un punct exterior dreptei determină un plan.

Exemplu. Dreapta a și punctul $A \notin a$ determină planul (a, A) .

5. Două drepte concurente determină un plan.

Exemplu. Dreptele $a, b, a \cap b \neq \emptyset$ determină planul (a, b) .

6. Două drepte paralele determină un plan.

Exemplu. Dreptele $a, b, a \parallel b$ determină planul (a, b) .

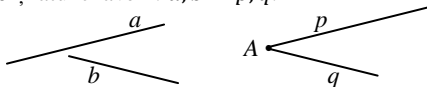
1.2 Unghiul a două drepte în spațiu; drepte perpendiculare

1. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

2. Prin **unghiul a două drepte concurente** înțelegem unghiul ascuțit sau drept făcut de cele două drepte, având vârful în punctul de intersecție al dreptelor.

3. Prin **unghiul a două drepte în spațiu** înțelegem unghiul ascuțit sau drept, care are vârful în orice punct din spațiu și laturile paralele cu dreptele date.

Exemplu. Fiind date în spațiu dreptele a și b , atunci alegem un punct A în spațiu, ducem prin A dreptele $p \parallel a$ și $q \parallel b$ și atunci avem: $\widehat{a, b} \equiv \widehat{p, q}$.



4. Două drepte din spațiu sunt perpendiculare, dacă măsura unghiului format de cele două drepte este 90° .

5. Fie un punct A și o dreaptă a , $A \notin a$ și $AD \perp a$. Atunci distanța de la punctul A la dreapta a este $d(A, a) = d(A, D)$.

Remarcă. Dacă $A \in a$, atunci $d(A, a) = 0$.

1.3 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan, dreaptă perpendiculară pe un plan, distanța de la un punct la un plan

1. O dreaptă care are un singur punct comun cu un plan se numește **secantă** aceluia plan.

2. Fiind date dreapta a și planul α , $a \not\subset \alpha$, spunem că dreapta a este **paralelă** cu α , și notăm $a \parallel \alpha$, dacă $a \cap \alpha = \emptyset$.

3. **Teoremă.** O dreaptă paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan este paralelă cu planul sau este inclusă în plan.

4. O dreaptă este **perpendiculară pe un plan** dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.

5. **Teoremă.** O dreaptă perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan este perpendiculară pe plan.

6. Fie un punct A și un plan α , $A \notin \alpha$ și $AD \perp \alpha$, $D \in \alpha$.

Atunci distanța de la punctul A la planul α este $d(A, \alpha) = d(A, D)$.

Remarcă. Dacă $A \in \alpha$, atunci $d(A, \alpha) = 0$.

1.4 Pozițiile relative a două plane; plane paralele; distanța dintre două plane paralele

1. Două plane care au o dreaptă comună se numesc plane **secante**.

2. Fiind date două plane α și β , spunem că ele sunt **paralele** și notăm $\alpha \parallel \beta$, dacă $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

3. **Teoremă.** Două plane sunt paralele dacă două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu celălalt plan.

4. Fie α și β două plane, a și b două drepte, $a \parallel b$ astfel încât $a \subset \alpha$ și $b \subset \beta$. Dacă $\alpha \cap \beta = c$, atunci $c \parallel a$ și $c \parallel b$.

5. Fie o dreaptă a și două plane α și β astfel încât $a \subset \beta$, $a \parallel \alpha$ și $\alpha \cap \beta = b$. Atunci $a \parallel b$.

6. Fie α un plan, a o dreaptă $a \parallel \alpha$, $A \in \alpha$, iar b dreapta ce trece prin A și $b \parallel a$. Atunci $b \subset \alpha$.

7. Fie α, β două plane, astfel încât $\alpha \parallel \beta$ și γ un alt plan astfel încât $\alpha \cap \gamma = a$ și $\beta \cap \gamma = b$. Atunci $a \parallel b$.

8. Fie α, β, γ trei plane distincte două câte două. Dacă $\alpha \parallel \beta$ și $\beta \parallel \gamma$, atunci $\alpha \parallel \gamma$.

9. Cel puțin trei plane paralele determină pe două drepte oarecare pe care le intersectează segmente respectiv proporționale.

10. Fie α și β două plane paralele și a o dreaptă perpendiculară pe α și β în punctele A și respectiv B . Atunci distanța dintre planele α și β este $d(\alpha, \beta) = d(A, B)$.

1.5 Aplicații

a) Considerați un plan α , patru puncte $A, B, C, D \in \alpha$ și punctul F exterior planului. Uniți între ele punctele.

Determinați numărul minim de drepte și numărul maxim de drepte care se formează.

Soluție. — Dacă A, B, C, D sunt coliniare, atunci obținem dreptele AB, FA, FB, FC, FD și deci numărul minim de drepte este 5.

— Dacă oricare 3 puncte dintre punctele A, B, C, D nu sunt coliniare, atunci obținem dreptele $AB, AC, AD, BC, BD, CD, FA, FB, FC, FD$, adică 10 drepte. Deci numărul maxim de drepte este 10.

b) Fie d o dreaptă și A, B două puncte exterioare dreptei d . Să se stabilească câte plane distincte pot fi determinate de cele două puncte și de dreaptă.

Soluție. — Dacă $AB \parallel d$, luăm $\alpha = (AB, d)$;
— Dacă $AB \cap d = \{M\}$, luăm $\alpha = (A, d)$;

– Dacă AB și d , sunt necoplanare luăm $\alpha = (A, d)$ și $\beta = (B, d)$.

c) Se consideră trei puncte $A, B, C \in \alpha$ necoliniare și un plan β . Să se determine un punct $M \in \alpha \cap \beta$ astfel încât $MA = MB = MC$.

Soluție. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Atunci $MA = MB = MC$. Dacă d este dreapta ce trece prin O și este perpendiculară pe α atunci pentru orice $M \in \alpha$ avem: $MA = MB = MC$, deoarece $\triangle MOA \equiv \triangle MOB \equiv \triangle MOC$.
Avem două situații:

– Dacă $d \cap \beta = \{M\}$ atunci M este punctul căutat;

– Dacă $d \cap \beta = \emptyset$ atunci problema nu are soluții.

d) Fie $ABCD$ și $ABEF$ două paralelograme situate în plane diferite. Să se demonstreze că $CD \parallel (ABEF)$.

Soluție. Avem $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (ABEF)$.

e) Fie $ABCD$ un paralelogram și α un plan astfel încât $A, B, C, D \notin \alpha, AB \parallel \alpha$.

Să se demonstreze că $CD \parallel \alpha$.

Soluție. Fie $\beta = (ABCD)$ și $d = (ABCD) \cap \alpha$. Rezultă că $AB \parallel d$. Însă $CD \parallel AB$ și atunci $CD \parallel d$ și deci $CD \parallel \alpha$

f) Fie $ABCD$ un paralelogram, O intersecția diagonalelor sale, M un punct exterior planului (ABC) și N mijlocul segmentului (AM) .

Să se demonstreze că $CM \parallel (BND)$.

Soluție. În triunghiul ACM , ON este linie mijlocie. Atunci $ON \parallel CM$. Cum $ON \subset (BND)$ rezultă că $CM \parallel (BND)$

g) Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și M un punct arbitrar pe perpendiculara în B pe planul (ABC) . Ducem $BE \perp MA$.

Să se demonstreze că:

$$1) MA \perp AC$$

$$2) AC \perp BE.$$

Soluție. 1) $MB \perp (ABC) \Rightarrow MB \perp AC$ și cum $AB \perp AC$ rezultă că $AC \perp (MAB) \Rightarrow AC \perp MA$.

2) Conform 1) $AC \perp (MAB) \Rightarrow AC \perp BE$.

h) Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), D mijlocul lui (BC) și M un punct arbitrar pe perpendiculara în C pe planul (ABC) și E mijlocul lui (MB) . Să se demonstreze că:

$$1) MD \perp AD;$$

$$2) AC \perp ED;$$

$$3) BC \perp AE.$$

Soluție. 1) $MC \perp (ABC), CD \perp AD \Rightarrow MD \perp AD$.

2) ED este linie mijlocie în triunghiul $BCM \Rightarrow ED \parallel MC$. Însă $MC \perp (ABC)$ și atunci $ED \perp (ABC) \Rightarrow ED \perp AC$.

3) $BC \perp ED, BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (ADE) \Rightarrow BC \perp AE$.

i) Fie $ABCD$ un paralelogram, $\{O\} = AC \cap BD$, M un punct arbitrar în spațiu, N mijlocul lui (MB) și P mijlocul lui (MC) .

Să se arate că planele (ADM) și (ONP) sunt paralele.

Soluție. (NP) și (NO) sunt linii mijlocii în triunghiurile MBC și respectiv MBD . Atunci $NP \parallel BC \parallel DA$ și $NO \parallel DM$ și deci $(ONP) \parallel (ADM)$.

j) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ADC și respectiv ABD .

Să se demonstreze că $(G_1 G_2 G_3) \parallel (ABC)$.

Soluție. Fie M mijlocul lui (CD) . Atunci $G_1 \in BM$,
 $G_2 \in AM$ $\frac{G_1M}{G_1B} = \frac{G_2M}{G_2A} = \frac{1}{2} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$ în triunghiul ABM .
 Analog $G_1G_3 \parallel AC$, de unde $(G_1, G_2, G_3) \parallel (A, B, C)$

2. Proiecții ortogonale pe un plan

2.1 Proiecții de puncte, segmente și de drepte pe un plan; unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecției unui segment pe un plan

1. **Proiecția unui punct** pe o dreaptă este un punct și
 anume: – piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe
 dreaptă, dacă punctul este exterior drepte;
 – însuși punctul, dacă punctul aparține dreaptă.



Exemplu. Fiind dată dreapta a și punctul A , ducem
 $AD \perp a$ și atunci $pr_a A = D$.

2. **Proiecția unui segment** $[AB]$ pe o dreaptă a este:
 – segmentul $[A'B']$, unde $A' = pr_a A$ și $B' = pr_a B$, dacă AB
 nu este perpendiculară pe a ;
 – punctul A' , dacă $AB \perp a$.

Exemplu. Fiind dat segmentul $[AB]$ și dreapta a , ducem
 $AD \perp a$ și $BE \perp a$. Atunci $pr_a [AB] = [DE]$.

3. **Proiecția unui punct** pe un plan este un punct și
 anume: – piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe
 plan, dacă punctul este exterior planului;
 – însuși punctul, dacă punctul aparține planului.

4. **Proiecția unei drepte** a pe un plan α este:
 – dreapta $A'B'$, unde $A' = pr_\alpha A$ și $B' = pr_\alpha B$, unde $A, B \in a$
 și dreapta a nu este perpendiculară pe α ;

– punctul $A' = pr_{\alpha}A$, dacă $d \perp \alpha$.

5. Proiecția unui segment $[AB]$ pe un plan α este:

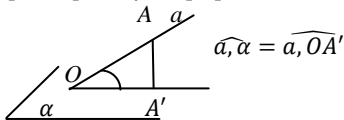
– segmentul $[A'B']$, unde $A' = pr_{\alpha}A$ și $B' = pr_{\alpha}B$, dacă dreapta AB nu este perpendiculară pe α ;

– punctul A' , dacă $AB \perp \alpha$.

6. Fiind dat segmentul $[AB]$ și planul α , astfel încât AB nu este perpendiculară pe α , atunci proiecția segmentului $[AB]$ pe planul α este segmentul $[A'B']$ și $A'B' = AB \cos(\widehat{AB, A'B'})$.

7. Unghiul făcut de o dreaptă a cu un plan α este unghiul făcut de dreaptă cu proiecția ei pe plan.

Exemplu.



Aplicații.

a) Fie ABC un triunghi echilateral cu latura de lungime 10 cm. În punctul A se ridică perpendiculara pe planul (ABC) pe care se ia un punct M astfel încât $AM = 10$ cm.

Determinați unghiurile pe care le fac dreptele MA, MB și respectiv MC cu planul (ABC) .

Soluție. $MA \perp (ABC)$ și atunci MA face cu planul (ABC) un unghi de 90° . Unghiurile făcute de dreptele MB și respectiv MC cu planul (ABC) sunt \widehat{MBA} și respectiv \widehat{MCA} .

$$\operatorname{tg} \widehat{MBA} = \frac{MA}{AB} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow m(\widehat{MBA}) = 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} \widehat{MCA} = \frac{MA}{AC} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow m(\widehat{MCA}) = 45^\circ.$$

b) Fie $ABCD$ un romb de latură a și unghi ascuțit de 60° . În vârful A , obtuz se ridică o perpendiculară d pe care se ia un punct M astfel încât $MA = a$.

Determinați unghiurile făcute de dreptele MB, MC, MD cu planul (ABC) .

Soluție. Evident $\triangle ABC$ este schilateral și atunci $AB = AC = AD = a$. Însă $MA = a$ și atunci triunghiurile MAB, MAC, MAD sunt dreptunghice isoscele. Unghiurile determinate de dreptele MB, MC și respectiv MD sunt $\widehat{MBA}, \widehat{MCA}, \widehat{MDA}$ și sunt toate egale cu 45° .

2.2 Teorema celor trei perpendiculare

1. Teoremă. Fie α un plan, A un punct, $A \notin \alpha$, a o dreaptă, $a \subset \alpha$ și $O \in \alpha$ astfel încât $AO \perp \alpha$. Dacă $OB \perp a, B \in a$, atunci $AB \perp a$.

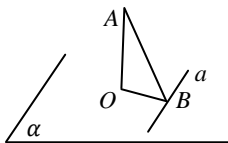


fig. 1

2. Teoremă reciprocă 1. Fie α un plan, A un punct, $A \notin \alpha$, a o dreaptă, $a \subset \alpha$ și $O \in \alpha$ astfel încât $AO \perp \alpha$. Dacă $AB \perp a, B \in a$, atunci $OB \perp a$ (fig. 1).

3. Teoremă reciprocă 2. Fie α un plan, A un punct, $A \notin \alpha$, a o dreaptă, $a \subset \alpha$ și $B \in a$ astfel încât $OB \perp a$. Dacă $AO \perp OB$, și $AB \perp a$, atunci $AO \perp \alpha$ (fig. 1).

4. Aplicații.

a) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB \perp CD$ și $BC \perp AD$. Demonstrați că $AC \perp BD$.

Soluție. Fie $BB' \perp CD, CC' \perp BD$ și $DD' \perp BC$, H ortocentrul triunghiului BCD . Avem $BC \perp DD', BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (ADD') \Rightarrow BC \perp AH$. Analog $CD \perp AH$ de unde rezultă $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp BD$. Însă $CC' \perp BD$ și atunci $BD \perp (AHC) \Rightarrow BD \perp AC$.

b) În vârful A al triunghiului ABC se ridică perpendiculara AD pe planul său. Ducem $CE \perp AB$ și $EF \perp BD$. Demonstrați că $BD \perp (CEF)$.

Soluție. Avem $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp CE$ (1). Însă $CE \perp AB$ (2). Din (1) și (2) rezultă $CE \perp (ABD) \Rightarrow CE \perp BD$ (3). Avem deci: $BD \perp CE, BD \perp EF$ de unde rezultă $BD \perp (CEF)$.

2.3 Unghi diedru; unghiul dintre două plane; plane perpendiculare

1. Numim **unghi diedru** figura geometrică formată din două semiplane delimitate de aceeași dreaptă reunite cu dreapta.

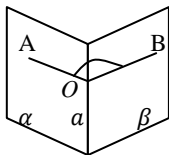


fig. 2

2. Fiind dat unghiul diedru având muchia a , numim **unghi plan** asociat acestui unghi diedru, unghiul \widehat{AOB} , unde $O \in a, AO \perp a, BO \perp a, OA \subset \alpha, OB \subset \beta$ (vezi fig. 2).

3. **Măsura** unui **unghi diedru** este măsura unghiului plan asociat unghiului diedru.

4. Fiind date două plane neparalele α și β , $\alpha \cap \beta = a$, $O \in a$, $OA \perp a$, $OB \perp a$, $OA \subset \alpha$, $OB \subset \beta$ astfel încât $m(\widehat{AOB}) < 180^\circ$, atunci \widehat{AOB} este unghiul dintre planele α și β .

5. **Definiție.** Două plane concurente sunt **perpendiculare**, dacă unghiul determinat de aceste două plane este un unghi drept.

6. **Teoremă.** Fiind dat planul α și dreapta a , $a \perp \alpha$, atunci oricare ar fi planul β , astfel încât $a \subset \beta$ avem $\alpha \perp \beta$.

7. **Teoremă.** Fie α, β două plane perpendiculare și $a = \alpha \cap \beta$. Dacă $b \subset \alpha$ și $b \perp a$, atunci $b \perp \beta$.

8. **Teoremă.** Fie α, β două plane perpendiculare. Atunci perpendiculara dusă dintr-un punct al unui plan pe al doilea plan este conținută în primul plan.

9. **Teoremă.** Două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre plane conține o dreaptă care este perpendiculară pe celălalt plan.

10. Aplicații

a) Fie punctele O, A, B, C cu proprietatea că $OA \perp OB \perp OC$, $OA = OB = OC$ și D mijlocul lui (AB) .

Demonstrați că $(ABC) \perp (CDO)$.

Soluție. $OC \perp OA$, $OC \perp OB \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$.

Triunghiul OAB este isoscel de unde rezultă $OD \perp AB$. Atunci $AB \perp (OCD)$, $AB \subset (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (CDO)$.

b) Fie $ABCD$ un pătrat de latură a , $AC \cap BD = \{O\}$. Pe planul pătratului se ridică de aceeași parte perpendicularele AM și respectiv CN , astfel încât $AM = CN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Demonstrați că $(MBD) \perp (NBD)$.

Soluție. $AM \perp (ABCD)$; $AO \perp BD \Rightarrow MO \perp BD$.

Analog $NO \perp BD$. Cum BD este intersecția planelor (MBD) și (NBD) , rezultă că unghiul diedru al planelor (MBD) și (NBD) este \widehat{MON} .

Prin calcul $MO = NO = a$ și $MN = a\sqrt{2}$ și deci triunghiul MON este dreptunghic în O . Atunci $m(\widehat{MON}) = 90^\circ$ și atunci $(MBD) \perp (NBD)$.

CUPRINS

Algebră

1	Mulțimi	3
	1.1 Noțiunea de mulțime. Element. Relația de apartenență	3
	1.2 Relația între două mulțimi. Submulțimi	4
	1.3 Operații cu submulțimi	5
	1.4 Aplicații	6
2.	Mulțimea numerelor naturale	8
	2.1 Scrierea și citirea numerelor naturale în sistemul de numerație zecimal	8
	2.2 Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Compararea și ordonarea numerelor naturale. Aproximarea și rotunjirea numerelor naturale	10
	2.3 Adunarea numerelor naturale	12
	2.4 Scăderea numerelor naturale	13
	2.5 Înmulțirea numerelor naturale. Factor comun. Ordinea efectuării operațiilor. Utilizarea parantezelor	14
	2.6 Împărțirea cu rest a numerelor naturale	16
	2.7 Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural. Compararea puterilor care au aceeași bază sau același exponent. Ordinea efectuării operațiilor	17
	2.8 Divizor. Multiplu	21
	2.9 Criterii de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3 și 9 ...	22
	2.10 Numere prime. Numere compuse	24
	2.11 Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	25
	2.12 Divizori comuni a două sau mai multe numere naturale. C.m.m.d.c. Numere prime între	

	ele	26
	2.13 Multipli comuni a două sau mai multe numere naturale. C.m.m.m.c. Relația dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.	27
	2.14 Aplicații	28
3	Mulțimea numerelor întregi	31
	3.1 Număr întreg, opusul unui număr întreg, reprezentarea pe axă a numerelor întregi, valoarea absolută (modulul)	31
	3.2 Compararea și ordonarea numerelor întregi ..	32
	3.3 Adunarea numerelor întregi	33
	3.4 Scăderea numerelor întregi	34
	3.5 Înmulțirea numerelor întregi	34
	3.6 Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	35
	3.7 Ridicarea la putere a numerelor întregi	36
	3.8 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	37
	3.9 Divizorii unui număr întreg	37
	3.10 Aplicații	39
4	Mulțimea numerelor raționale	40
	4.1 Numere raționale pozitive	40
	4.2 Mulțimea numerelor raționale \mathbf{Q} ; reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor; opusul unui număr rațional; valoarea absolută (modulul) unui număr rațional	48
	4.3 Compararea și ordonarea numerelor raționale	49
	4.4 Adunarea și scăderea numerelor raționale ...	50
	4.5 Înmulțirea numerelor raționale	52
	4.6 Împărțirea numerelor raționale	52
	4.7 Puterea unui număr rațional cu exponent întreg. Reguli de calcul cu puteri	52

	4.8 Aplicații	54
5	Numere reale	54
	5.1 Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect	54
	5.2 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv pătrat perfect	54
	5.3 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv care nu este pătrat perfect	55
	5.4 Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale	56
	5.5 Operații cu numere reale de forma $a\sqrt{b}$, $b \in \mathbf{Q}$, $a > 0$	56
	5.6 Raționalizarea numitorului unei fracții, având numitorul irațional	57
6	Rapoarte și proporții	58
	6.1 Rapoarte și procente	58
	6.2 Proporții	59
	6.3 Mărimi direct proporționale. Regula de trei simplă	59
	6.4 Mărimi invers proporționale. Regula de trei simplă	60
	6.5 Media aritmetică	61
	6.6 Media aritmetică ponderată	61
	6.7 Probabilitatea realizării unor evenimente	62
	6.8 Aplicații	62
7	Calcul algebric	64
	7.1 Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	64
	7.2 Înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere	64
	7.3 Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	65
	7.4 Reguli de calcul cu numere reale reprezentate	

	prin litere	65
	7.5 Formule de calcul prescurtat	66
	7.6 Descompunerea în factori	66
	7.7 Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Operații cu acestea	68
	7.8 Inegalități	70
8	Funcții	72
9	Ecuatii și inecuații	75
	9.1 Ecuatii de forma $ax + b = 0, x \in \mathbf{R}, a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$	75
	9.2 Ecuatii de forma $ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}$.	76
	9.3 Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$	77
	9.4 Inecuații de forma $ax + b > 0 (\geq 0, < 0, \geq 0)$ $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$	79
	9.5 Aplicații	79
10	Sisteme de ecuații și inecuații de gradul I	80
	10.1 Sisteme de ecuații de gradul I cu două necunoscute	80
	10.2 Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută	81
	10.3 Aplicații	82
Geometrie plană		83
1.	Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta	83
	1.1 Punctul	83
	1.2 Dreapta	83
	1.3 Segmentul de dreaptă	85
	1.4 Semidreapta	88
2.	Unghiul	89
	2.1 Elementele și măsura unui unghi	89
	2.2 Clasificarea unghiurilor	90
	2.3 Congruența unghiurilor	90

2.4	Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi . . .	90
2.5	Unghiuri opuse la vârf; congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct; suma măsurilor lor	92
3.	Congruența triunghiurilor	94
3.1	Triunghi: definiție, elemente; clasificarea triunghiurilor; perimetrul triunghiului	94
3.2	Construcția triunghiurilor	96
3.3	Congruența triunghiului oarecare	97
4.	Perpendicularitate	99
4.1	Drepte perpendiculare; oblice; distanța de la un punct la o dreaptă	99
4.2	Înălțimea în triunghi; concurența înălțimilor	99
4.3	Criterii de congruență ale triunghiurilor dreptunghice: IC, IU, CC, CU	101
4.4	Mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi; simetria față de o dreaptă	102
5.	Paralelism	103
5.1	Drepte paralele; construirea dreptelor paralele; axioma paralelelor	103
5.2	Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	104
6.	Proprietăți ale triunghiurilor	107
6.1	Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior	107
6.2	Mediana în triunghi; concurența medianelor unui triunghi	108
6.3	Proprietăți ale triunghiului isoscel	109
6.4	Proprietăți ale triunghiului echilateral	111
6.5	Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	112

7	Patrulaterare	113
	7.1 Patrulaterul convex, suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	113
	7.2 Paralelogram; proprietăți	114
	7.3 Paralelograme particulare; dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți	116
	7.4 Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți ..	120
	7.5 Arii; calculul ariilor unor suprafețe	122
	7.6 Aplicații	125
8	Asemănarea triunghiurilor	126
	8.1 Raportul a două segmente, segmente proporționale	126
	8.2 Teorema paralelelor echidistante. Teorema lui Thales	126
	8.3 Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi	127
	8.4 Linia mijlocie în trapez; proprietăți	128
	8.5 Triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării	128
	8.6 Aplicații	129
9	Relații metrice în triunghiul dreptunghic	131
	9.1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă	131
	9.2 Teoreme importante, teorema înălțimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora	131
	9.3 Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic; sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi	132
	9.4 Rezolvarea triunghiului dreptunghic	133
	9.5 Aplicații	134
10	Cercul	135
	10.1 Cercul; definiție, elemente	135
	10.2 Unghi la centru; măsura arcelor; arce	

congruente	136
10.3 Coarde și arce în cerc	136
10.4 Unghi înscris în cerc; triunghi înscris în cerc .	137
10.5 Patrulater înscris în cerc; patrulater inscriptibil	137
10.6 Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc; tangenta dintr-un punct exterior la un cerc; triunghi circumscris unui cerc; patrulater circumscris unui cerc	138
10.7 Poligoane regulate; calculul elementelor în triunghiul echilateral, pătrat, hexagon regulat	139
10.8 Aplicații	140
Geometrie în spațiu	
1. Relații între puncte, drepte și plane	141
1.1 Puncte, drepte, plane; determinarea dreptei, determinarea planului	141
1.2 Unghiul a două drepte în spațiu, drepte perpendiculare	141
1.3 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan; dreaptă perpendiculară pe un plan; distanța de la un punct la un plan	142
1.4 Pozițiile relative a două plane; plane paralele; distanța dintre două plane paralele	143
1.5 Aplicații	143
2. Proiecții ortogonale pe un plan	146
2.1 Proiecții de puncte, segmente și de drepte pe un plan; unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecției unui segment pe un plan	146
2.2 Teorema celor trei perpendiculare	148
2.3 Unghi diedru; unghiul dintre două plane; plane perpendiculare	149
3. Corpuri geometrice	150
3.1 Prisma regulată.	150

3.2 Piramida regulată	153
3.3 Trunchiul de piramidă regulată	156
3.4 Corpuri rotunde	158
3.4.1 Cilindrul circular drept	158
3.4.2 Conul circular drept	160
3.4.3 Trunchiul de con circular drept	161
3.4.4 Sfera	162