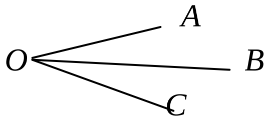
5. Noțiuni geometrice fundamentale
5.2 Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi.
a) Noțiuni teoretice și exemple

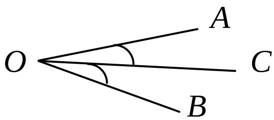
1. Două unghiuri proprii care au vârful comun, o latură comună, iar celelalte două laturi situate de o parte și de alta a laturii comune se numesc **unghiuri adiacente**.

Exemplu. În figura de mai jos unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ sunt adiacente, O fiind vârful comun și $[OB$ latura comună.



2. Bisectoarea unui unghi este o semidreaptă interioară unghiului, care are originea în vârful unghiului și care determină cu laturile unghiului două unghiuri congruente.

Exemplu. În figura de mai jos avem unghiul $\widehat{AOB}$ și $[OC$ bisectoare, deoarece $m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{BOC}\right)$.



3. Bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ se construiește astfel:

a) se determină $m(\widehat{AOB})$ folosind raportorul;

b) construim semidreapta $[OC$ interioară unghiului $\widehat{AOB}$ astfel încât ea să facă cu una din laturile $[OA$ sau $[OB$ un unghi având măsura egală cu jumătate din $m(\widehat{AOB})$.

b) Probleme rezolvate

1. Fie a și b două unghiuri adiacente având suma de 180^{o}, iar $b = 2a$. Determinați unghiurile a și b.

Soluție. $a + b = 180^{o} \Rightarrow a + 2a = 180^{o} \Rightarrow 3a = 180^{o} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 60^{o}$ și $b = 2a = 2 \cdot 60^{o} = 120^{o}$.

2. Se consideră un unghiul $\widehat{AOB}$ astfel încât $m\left(\widehat{AOB}\right) = 40^{o}$ $[OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ și $[ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$. Să se calculeze $m\left(\widehat{BON}\right)$.

Soluție. $[OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, de unde rezultă că $m\left(\widehat{AOM}\right) = m\left(\widehat{BOM}\right) = 40^{o}: 2 = 20^{o}$. $[ON$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$, de unde $m\left(\widehat{MON}\right) = m\left(\widehat{NOA}\right) = 20^{o}: 2 = 10^{o}$ și $m\left(\widehat{BON}\right) = m\left(\widehat{BOM}\right) + m\left(\widehat{MON}\right) = 20^{o} + 10° = 30^{o}$.

3. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi de 90^{o} și $[OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$.

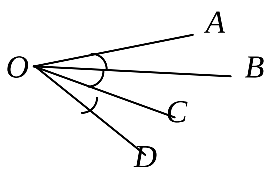
Calculați complementul și suplementul unghiului $\widehat{AOM}$.

Soluție. $\widehat{AOM} = 90^{o}: 2 = 45^{o}$. Complementul unghiului $\widehat{AOM}$ are măsura $90^{o} - 45^{o} = 45^{o}$, iar suplementul unghiului $\widehat{AOM}$ are măsura $180^{o} - 45^{o} = 135^{o}$.

4. Se consideră patru semidrepte distincte $[OA, [OB, [OC$ și $[OD$, astfel încât $[OB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$ și $[OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$.

Să se demonstreze că $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COD}$.

Soluție.



Avem $[OB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$, de unde rezultă că $m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{BOC}\right)$. Deoarece $[OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$, de unde rezultă că $m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{COD}\right)$. Din cele două relații obținem: $m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{COD}\right)$, de unde $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COD}$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie $\widehat{AOB} = 30^{\circ}$ și $\widehat{BOC} = 60^{\circ}$**.** Unghiul $\widehat{AOC}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{70^o}$ $\mathbf{80^o}$ $\mathbf{90^o}$ $\mathbf{100^o}$ $\mathbf{110^o}$

2. Fie $\widehat{AOB} = 80^{\circ}$ și C un punct în interiorul unghiului $\widehat{AOB}$ astfel încât $\widehat{AOC} = 30^{\circ}$**.** Complementul unghiului $\widehat{BOC}$ este egal cu:

$\mathbf{20^o}$ $\mathbf{30^o}$ $\mathbf{40^o}$ $\mathbf{50^o}$ $\mathbf{60^o}$

3. Fie $\widehat{AOB} = 90^{\circ}$ și C un punct în interiorul unghiului $\widehat{AOB}$ astfel încât $\widehat{AOC} = 45^{\circ}$**.** Complementul complementului unghiului $\widehat{BOC}$ este egal cu:

$\mathbf{25^o}$ $\mathbf{35^o}$ $\mathbf{45^o}$ $\mathbf{55^o}$ $\mathbf{65^o}$

4. Fie $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}$ unghiuri adiacente astfel încât $\widehat{AOB} = 75^{\circ}$ și și $\widehat{AOC} = 120$**.** Unghiul $\widehat{BOC}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{25^o}$ $\mathbf{35^o}$ $\mathbf{45^o}$ $\mathbf{55^o}$ $\mathbf{65^o}$

5. Fie $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}$ unghiuri adiacente astfel încât $\widehat{AOB} = 60^{\circ}$ și $\widehat{AOC} = 100^{\circ}$**.** Complementul unghiul $\widehat{BOC}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{10^o}$ $\mathbf{20^o}$ $\mathbf{30^o}$ $\mathbf{40^o}$ $\mathbf{50^o}$

6. Fie $\widehat{AOB} = 80^{\circ}$ și $\widehat{BOC} = 40^{\circ}$ unghiuri adiacente. Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ și $[ON$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$ atunci unghiul $\widehat{MON}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{30^o}$ $\mathbf{40^o}$ $\mathbf{50^o}$ $\mathbf{60^o}$ $\mathbf{70^o}$

7. Fie $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}$ unghiuri adiacente astfel încât $\widehat{AOB} = 110^{\circ}$ și $\widehat{BOC} = 50^{\circ}$. Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ atunci unghiul $\widehat{MOC}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{105^o}$ $\mathbf{110^o}$ $\mathbf{115^o}$ $\mathbf{120^o}$ $\mathbf{125^o}$

8. Fie $\widehat{AOB} = 100^{\circ}$ și $\widehat{AOC} = 20^{\circ}$. Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ atunci unghiul $\widehat{COM}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{10^o}$ $\mathbf{20^o}$ $\mathbf{30^o}$ $\mathbf{40^o}$ $\mathbf{50^o}$

9. Fie $\widehat{AOB} = 80^{\circ}$. Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ și $[ON$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$atunci unghiul $\widehat{NOM}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{10^{o}}$ $\mathbf{20^{o}}$ $\mathbf{30^{o}}$ $\mathbf{40^{o}}$ $\mathbf{50^{o}}$

10. Fie unghiurile adiacente $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}$ astfel încât $m(\widehat{AOC}) =$ $= 90^{\circ}$ și $m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot m(\widehat{BOC})$. Unghiul $\widehat{AOB}$ are măsura de:

$\mathbf{30^{o}}$ $\mathbf{40^{o}}$ $\mathbf{50^{o}}$ $\mathbf{60^{o}}$ $\mathbf{70^{o}}$

11. Fie unghiurile adiacente $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD},$ astfel încât avem $m(\widehat{AOD}) = 90^{\circ}$ și $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD})$. Unghiul $\widehat{AOB}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{30^{o}}$ $\mathbf{40^{o}}$ $\mathbf{45^{o}}$ $\mathbf{60^{o}}$ $\mathbf{70^{o}}$

12. Fie două unghiuri adiacente cu laturile necomune în prelungire, iar unul dintre unghiuri este de 2 ori mai mare decât celălalt. Unghiul mai mic are măsura egală cu:

$\mathbf{30^{o}}$ $\mathbf{40^{o}}$ $\mathbf{50^{o}}$ $\mathbf{60^{o}}$ $\mathbf{70^{o}}$

13. Fie $\widehat{AOB} = 90^{\circ}$. Fie $[OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, $[ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$ și $[OP$ bisectoarea unghiului $\widehat{MOB}$.

Unghiul $\widehat{NOP}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{30^{o}}$ $\mathbf{40^{o}}$ $\mathbf{45^{o}}$ $\mathbf{60^{o}}$ $\mathbf{70^{o}}$

14. Fie două unghiuri adiacente $\widehat{AOB} = 30^{\circ}$ și $\widehat{BOC} = 70^{\circ}$. Fie $[OM$ și $[ON$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}$ și respectiv $\widehat{BOC}$.

Unghiul $\widehat{MON}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{30^{o}}$ $\mathbf{40^{o}}$ $\mathbf{50^{o}}$ $\mathbf{60^{o}}$ $\mathbf{70^{o}}$

15. Fie $[OA, [OB, [OC, [OD$ patru semidrepte distincte astfel încât $[OB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$ și $[OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$. Știind că $m(\widehat{BOC}) = 30^{\circ}$, să se calculeze $m(\widehat{AOD})$ și să se arate că are valoarea egală cu:

$\mathbf{70^{o}}$ $\mathbf{80^{o}}$ $\mathbf{90^{o}}$ $\mathbf{100^{o}}$ $\mathbf{110^{o}}$

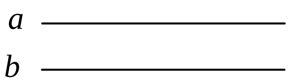
5.3 Drepte paralele. Axioma dreptelor paralele. Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă). Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice.

a) Noțiuni teoretice

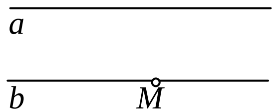
1. Două drepte a și b se numesc **paralele** și se notează $a||b$ dacă dreptele a și b sunt coplanare și nu au nici un punct comun $(a \cap b = \\ = \emptyset)$.

2. **Axioma paralelelor**. Printr-un punct dat, exterior unei drepte date trece o singură paralelă la dreapta dată.

3. a) Fiind dată dreapta a **construim** dreapta $b||a$ prin translația dreptei a.



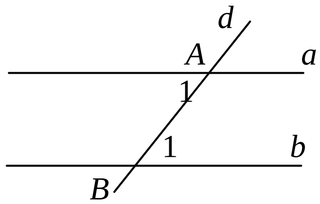
b) Fiind dată dreapta a și punctul $M \notin a$, **construim** dreapta b ce trece prin punctul M și este paralelă cu dreapta a, translatând dreapta a până când aceasta trece prin punctul M.



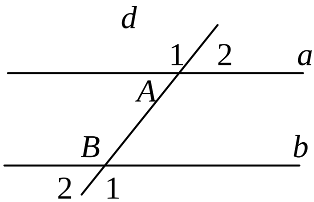
4. Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)

Teoremă. Dacă două drepte tăiate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci:
− cealaltă pereche de unghiuri alterne interne este formată din unghiuri congruente;
− fiecare pereche de unghiuri alterne externe este formată din unghiuri congruente;
− fiecare pereche de unghiuri corespondente este formată din unghiuri congruente.
− unghiurile interne de aceeași parte a secantei sunt suplementare.
− unghiurile externe de aceeași parte a secantei sunt suplementare.

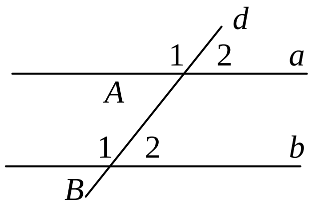
Criteriul 1. Dacă două drepte a și b sunt tăiate de o secantă d în punctele A și B, și dacă unghiurile alterne interne $\widehat{A_1}$ și $\widehat{B_1}$ sunt congruente, atunci dreptele a și b sunt paralele $(a||b)$.



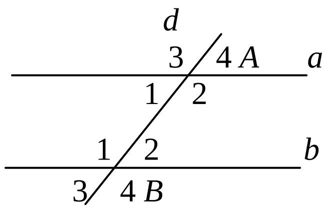
Criteriul 2. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B, atunci perechile de unghiuri alterne externe care se formează sunt congruente ($\widehat{A_1} \equiv \widehat{B_1}, \widehat{A_2} \equiv \widehat{B_2}$). .



Criteriul 3. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B, atunci perechile de unghiuri corespondente care se formează sunt congruente ($\widehat{A_1} \equiv \widehat{B_1}, \widehat{A_2} \equiv \widehat{B_2}$).



Criteriul 4. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B, atunci unghiurile interne situate de aceeași parte a secantei și unghiurile externe situate de aceeași parte a secantei sunt suplementare: $m(\widehat{A_1}) + m(\widehat{B_1}) = 180^{\circ}, m(\widehat{A_2}) +$ $m(\widehat{B_2}) = 180^{\circ}$, $m(\widehat{A_3}) + m(\widehat{B_3}) = 180^{\circ}$, $m(\widehat{A_4}) + +m(\widehat{B_4}) =$ $= 180^{\circ}$.



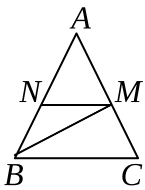
b) Probleme rezolvate

1. Fie *ABCD* un pătrat. Luați pe *AB* punctele *M* și *N* care împart segmentul *AB* în 3 părți egale. Duceți prin *M* și *N* paralele la *BC* care intersectează pe *CD* în *P* și respectiv *Q*. Identificați toate perechile de drepte paralele și stabiliți numărul lor.

Soluție. *AD* este paralelă cu *MP*, *NQ* și *BC* ; *MP* este paralelă cu *NQ* și *BC* ; *NQ* este parelă cu *BC*. De asemenea *AB* este paralelă cu *CD*. Sunt deci $3 + 2 + 1 + 1 = 7$ perechi de drepte paralele.

2. Fie $ABC(AB = AC)$ un triunghi isoscel și $[BM], M \in [AC]$ bisectoarea unghiului $\hat{B}$. Prin *M* se duce $MN \parallel BC$.

Demonstraţi că triunghiul *NBM* este isoscel.



Soluție. $MN||BC \Rightarrow \widehat{NMB} \equiv \widehat{MBC}$ (alterne interne). Însă $\widehat{NBM} \equiv \widehat{MBC}$ deoarece $[BM$ este bisectoare. Rezultă atunci că: $\widehat{NBM} \equiv \widehat{NMB}$ şi deci triunghiul *NBM* este isoscel.

3. În triunghiul *ABC* se duce bisectoarea [*AD*]. Prin *B* se duce o paralelă la *AD*, care intersectează dreapta *AC* în *M*.

Să se demonstreze că triunghiul *ABM* este isoscel.

Soluție. $MB||AD \Rightarrow \widehat{AMB} \equiv \widehat{CAD}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{MBA} \equiv \widehat{BAD}$ (alterne interne) şi $\widehat{CAD} \equiv \widehat{BAD}$, deoarece $[AD$ este bisectoare. Atunci $\widehat{MBA} \equiv \widehat{AMB}$ şi deci ΔABM este isoscel.

4. Fie *ABC* un triunghi oarecare. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ACB}$ se intersectează în *I*. Prin *I* ducem paralela *MN* la *BC*, unde $M \epsilon AB$ și $N \epsilon AC$.

Să se demonstreze că triunghiurile *BMI* și CNI sunt isoscele.

Soluție. *BI* este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ de unde $\widehat{MBI} \equiv \widehat{IBC}$. Însă $MI||BC \Rightarrow \widehat{MIB} \equiv \widehat{IBC}$. Din cele două egalități de unghiuri rezultă că: $\widehat{MBI} \equiv \widehat{MIB}$ și deci triunghiul *BMI* este isoscel.

Analog se demonstrează că triunghiul *CNI* este isoscel.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Desenați o dreaptă a și luați un punct *A* situat la 2 cm de dreaptă prin care duceți o paralelă la a, și un punct *B* situat la 3 cm de dreaptă prin care duceți o paralelă la a. Numărul de perechi de drepte paralele pe care le sesizați în desen este egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

2. Desenați o dreaptă a și luați punctele *A*, *B*, *C* situate la 1 cm, 2 cm și respectiv 3 cm de dreaptă. Prin fiecare din aceste puncte duceți respectiv câte o paralelă la a. Numărul de perechi de drepte paralele pe care le sesizați în desen este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

3. Fie *ABCD* un dreptunghi și *M* mijlocul segmentului *AB*. Prin M duceți $MN||BC, N \in CD$. Identificați toate perechile de drepte paralele din desen. Numărul lor este egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

4. Fie *ABCD* un dreptunghi și punctele *M*, *N* care împart segmentul *AB* în trei părți egale. Prin *M* și *N* se duc $MP||BC, P \in CD$ și $MQ||BC, Q \in CD$. Identificați toate perechile de drepte paralele din desen. Numărul lor este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Drepta AA' este paralelă cu un număr de drepte ale cubului egale cu:

1 **2** **3** **4** **5**

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Pe oricare față laterală a cubului există un număr de perechi de drepte paralele egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

7. Fie *ABCD* un dreptunghi cu $AD = 3 \cdot AB$ și $M, N \in AD$ astfel încât $AM = MN = ND$. Ducem $MM'||AB$ și $NN'||CD$. Identificați toate perechile de drepte paralele din desen. Numărul lor este egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

8. Fie *ABC* un triunghi oarecare, $M \in AB$ și ducem $MN||BC$, unde $N \in AC$. Unghiul $\widehat{ABC}$ este congruent cu un număr de unghiuri din desen egal cu: **1** **2** **3** **4** **5**

9. Fie *ABC* un triunghi isoscel ($AB = AC$). Fie $M \in AB$ și ducem $MN||BC$, unde $N \in AC$. Unghiul $\widehat{ABC}$ este congruent cu un număr de unghiuri din desen egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

10. Fie dreptele AB, CD, AD, BC astfel încât $AB||CD$ și $AD||BC$. Unghiul $\widehat{DAB}$ este congruent cu un număr de unghiuri egal cu:

3 **4** **5** **6** **7**

11. Fie *ABC* un triunghi echilateral, $M \in AB$ și ducem $MN||BC$, unde $N \in AC$. Unghiul $\widehat{AMN}$ este congruent cu un număr de unghiuri din desen egal cu: **1** **2** **3** **4** **5**

12. Fie *ABC* un triunghi isoscel (*AB* = *AC*) și $BM, M \in AC$ bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$. Prin *M* ducem $MN||BC$. Arătați că unghiul $\widehat{BMN}$ este congruent cu:

$\widehat{BAC}$ $\widehat{NBM}$ $\widehat{ABC}$ $\widehat{ACB}$ $\widehat{AMN}$

13. Fie *ABC* un triunghi oarecare și un punct $M \in AB$. Ducem $MN||BC, N \in AC$ și $PN||AB, P \in BC$. Arătați că unghiul $\widehat{AMN}$ este congruent cu:

$\widehat{BAC}$ $\widehat{NPC}$ $\widehat{BMN}$ $\widehat{ACB}$ $\widehat{BPN}$

14. Fie un dreptunghi *ABCD*. Ducem bisectoarea *AM* a unghiului $\widehat{DAB}, M \in CD$ și prin mijlocul *N* al laturii *AD* ducem paralela NP la *AM*, $P \in CD$. Măsura unghiului $\widehat{NPD}$ este egală cu:

$\mathbf{30^o}$ $\mathbf{15^o}$ $\mathbf{45^o}$ $\mathbf{60^o}$ $\mathbf{70^o}$

15. Fie *ABCD* un pătrat. Printr-un punct $M \in AB$ ducem $MN||AC$, unde $N \in BC$. Unghiul $\widehat{BMN}$ este congruent cu un număr de unghiuri din desen egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

C U P R I N S