

1.5 Proprietăți ale relației de divizibilitate în \mathbb{N}

1. Demonstrați că numărul $10^5 + 5$ se divide cu 15.
2. Demonstrați că numărul $10^{11} + 11$ se divide cu 3.
3. Demonstrați că numărul $10^{17} + 17$ se divide cu 9.
4. Determinați toate numerele de forma $\overline{1aab}$ care se divid cu 2 și suma cifrelor lor este 7.
5. Determinați toate numerele de forma $\overline{2aba}$ care se divid cu 15.
6. Determinați toate numerele de forma $\overline{a1ab}$ care se divid cu 30.
7. Determinați câte numere naturale de forma $\overline{a5a}$ divizibile cu 3 există.
8. Arătați că dacă a este divizor al lui 4, atunci a este divizor pentru orice multiplu al lui 4.
9. Arătați că, dacă a și b sunt numere naturale, atunci:
 - a) $4 \mid 3(8a + 12b) + 5(12a + 20b)$;
 - b) $5 \mid 2(5a + 10b) + 8(15a + 20b)$;
 - b) $9 \mid 6(18a + 27b) - 2(9a + 18b)$.
10. Arătați că dacă 6 este divizor al lui a și al lui b , atunci 6 este divizor al numerelor:
 - a) $a + b$
 - b) $2a + b$
 - c) $3a - 2b$
 - d) $a \cdot b$.
11. Arătați că pentru oricare două numere naturale a și b , numărul $a(1 + 2 + \dots + 19) + b(1 + 2 + \dots + 20)$ se divide 10.
12. Determinați numerele naturale x , astfel încât:
 - a) $x \mid 3x + 12$
 - b) $x + 1 \mid 2x + 8$
 - c) $x - 1 \mid 3x + 4$.
13. Determinați numerele naturale x , astfel încât:
 - a) $2x + 1 \mid 4x + 9$
 - b) $3x - 1 \mid 9x + 5$
 - c) $4x - 1 \mid 12x + 4$.

14. Arătați că dacă $3 \mid \overline{15x}$, atunci $3 \mid \overline{27x + 45x}$.

15. Arătați că dacă $8 \mid \overline{32x}$, atunci $8 \mid \overline{40x + 72x}$.

16. Arătați că numărul $x = (\overline{ab} + \overline{ba})(\overline{bc} + \overline{cb})$ se divide prin 121.

17. Demonstrați că dacă un număr natural împărțit la 24 dă restul 6, atunci el se divide prin 3.

18. Demonstrați că dacă un număr natural împărțit la 36 dă restul 16, atunci el se divide prin 4.

19. Să se arate că numărul $N = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{1000}$ este divizibil cu 340.

20. Demonstrați că numărul natural:

$$5^1 + 5^2 + \dots + 5^{100}$$

se divide cu 60.

21. Demonstrați că numărul natural:

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^{150}$$

se divide cu 31.

22. Demonstrați că numărul natural:

$$3^1 + 3^3 + \dots + 3^{99}$$

se divide cu 5.

23. Demonstrați că numărul natural:

$$3^1 + 3^2 + \dots + 3^{60}$$

se divide cu 52.

24. Demonstrați că numărul natural:

$$4^1 + 4^2 + \dots + 4^{300}$$

se divide cu 105.

25. Demonstrați că dacă $a + b + c$ este divizibil cu 3, atunci numărul $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ este divizibil cu 9.

1.6 Teste grilă de autoevaluare

Testul 1

1. Mulțimea numerelor naturale pătrate perfecte mai mari decât 20 și mai mici decât 75, are un număr de elemente egal cu:

1 2 3 4 5

2. Toate numerele naturale de forma \overline{aa} sunt divizibile cu:

8 9 10 11 12

3. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{1, 5\}$. Dintre propozițiile de mai jos, cea adevărată este:

$1 \in A \cap B$ $3 \in B$ $5 \notin A$ $7 \in A$ $1 \in A - B$

4. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{2, 5\}$.

Dintre propozițiile de mai jos, cea adevărată este:

$A \cap B = \{1\}$ $A - B = \{2\}$ $B - A = \{2\}$ $4 \in A$ $4 \in B$

5. Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale 125 și 725 este:

20 25 30 35 40

6. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, x\}$, unde $x \in \mathbf{N}$. Dacă $x > 4$, atunci $A \cap B$ are un număr de elemente egal cu:

1 2 3 4 5

7. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3x + 7 = 22\}$,

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mulțimea $B - A$ are un număr de elemente egal cu:

1 2 3 4 5

8. Mulțimea: $\{x \in \mathbf{N} \mid \overline{25x}$ se divide cu 2 $\}$ are un număr de elemente egal cu:

1 2 3 4 5

9. Fie: $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{2, 4, 6\}$. Mulțimea $A - B$ este:

A {1} {2} {3} {4}

Testul 2

1. Mulțimea numerelor naturale cuburi perfecte mai mari decât 25 și mai mici decât 100, are un număr de elemente egal cu:

1 2 3 4 5

2. Numărul natural 24 are un număr de divizori egal cu:

5 6 7 8 9

3. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Mulțimea $A - B$ are un număr de elemente egal cu:

1 2 3 4 5

4. Fie a și b prime astfel încât $a \cdot b = 143$. Valoarea celui mai mic număr prim dintre cele două este:

2 3 5 7 11

5. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ și $B = \{3, 5\}$. Mulțimea $A \cap B$ este:

{1, 3} {1, 5} {3, 5} {1, 3, 5} {3, 5, 7}

6. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2, 7, 8\}$ și $B = \{2, 7, x\}$, unde $x \in \mathbf{N}$. Dacă $x > 8$, atunci $A - B$ este egală cu:

{1, 2} {1, 7} {2, 7} {1, 7, 8} {1, 8}

7. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 4 \leq x < 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mulțimea $A \cap B$ este egală cu:

{4, 5} {1, 5} {2, 5} {1, 2} {2, 4}

8. Mulțimea $\{x \in \mathbf{N} \mid \overline{16x} \text{ se divide cu } 5\}$ este egală cu:

{1, 5} {0, 5} {1, 7} {1, 3} {2, 4}

9. Numărul $1 + 2 + \dots + 999$ are un număr de zerouri egal cu:

1 2 3 4 5

Testul 3

1. Numărul natural prim a care verifică relația:

$$a(a+2) = 35$$

este: 1 2 3 4 5

2. Cel mai mare divizor comun al numerelor de forma \overline{aaa}

este: 5 11 22 111 55

3. Mulțimea numerelor naturale mai mari decât 10 și mai mici decât 20, care pot fi scrise ca suma pătratelor a două numere naturale distincte, are un număr de elemente egal cu:

1 2 3 4 5

4. Mulțimea: $A = \{y = 2^x + 2^{x+1} \mid x \in \mathbf{N}, 6 \leq y < 20\}$ este

egală cu: $\{4, 6\}$ $\{4, 8\}$ $\{8, 12\}$ $\{6, 12\}$ $\{12, 16\}$

5. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divide pe } 4\}$ și

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divide pe } 6\}$. Mulțimea $A \cap B$ este egală cu:

$\{1, 3\}$ $\{1, 4\}$ $\{1, 2\}$ $\{1, 2, 5\}$ $\{3, 4, 6\}$

6. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, x\}$, unde $x \in \mathbf{N}$. Dacă $x > 4$, atunci $A \cap B$ este egală cu:

$\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$ $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 4\}$

7. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 6 \leq x + 4 < 8\}$,

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid 9 \leq x + 6 < 12\}$. Mulțimea $A \cap B$ este egală cu:

$\{1, 2\}$ $\{2, 3\}$ $\{2, 4\}$ $\{3\}$ $\{4\}$

8. Mulțimea $\{x \in \mathbf{N} \mid \overline{23x}$ se divide cu 10 $\}$ este egală cu:

$\{0\}$ $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$

9. Mulțimile: $A = \{1, 3, x+1, 5\}$ și $B = \{1, x, 4, 5\}$, sunt egale pentru valoarea lui x , egală cu:

1 2 3 4 5

Testul 4

1. Valoarea lui x astfel încât $\{1, 3, x, 7\} \cap \{2, 5\} = \{5\}$ este: **2** **3** **4** **5** **6**

2. Fie x, y naturale pentru care $\{1, x, 7\} \cap \{3, y, 5\} = \{3, 7\}$. Valoarea sumei $x + y$ este:

7 **8** **9** **10** **11**

3. Numere naturale de forma $\overline{13x}$ care se divid cu 2 sunt:

trei **patru** **cinci** **șase** **șapte**

4. Cardinalul mulțimii numerelor naturale prime de forma $\overline{a3}$ este egal cu: **7** **2** **6** **4** **5**

5. Determinați mulțimea tuturor numerelor naturale care reprezintă ultima cifră a unui pătrat perfect. Cardinalul acestei mulțimi este egal cu:

patru **cinci** **șase** **șapte** **opt**

6. Arătați că numerele \overline{aaa} și 129 nu sunt prime între ele. Ambele se divid cu:

2 **3** **4** **5** **6**

7. Se consideră mulțimile:

$$A = \{\overline{ab} \mid a + b = 3\} \text{ și } B = \{\overline{ab} \mid a - b = 3\}$$

Arătați că mulțimea $A \cap B$ are un singur element egal cu:

14 **25** **30** **41** **63**

8. Mulțimea:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid \overline{xx1} + \overline{x1x} + \overline{1xx} \text{ se divide cu } 5\}$ este egală cu:

{1, 2} **{2, 5}** **{2, 7}** **{4, 7}** **{5, 8}**

9. Arătați că numerele $n(n + 1)$ și 38 nu sunt prime între ele. Ambele se divid cu: **2** **3** **4** **5** **6**

Testul 5

1. Fie A mulțimea tuturor numerelor pare, pătrate perfecte mai mici decât 100 și $B = \{16, 36, 64\}$. Mulțimea $A - B$ este:

$$\{0, 2\} \quad \{4, 5\} \quad \{0, 4\} \quad \{4, 8\} \quad \{6, 8\}$$

2. Se consideră mulțimile: $A = \{\overline{ab} \text{ nr. prim} \mid a + b = 4\}$ și $B = \{\overline{ab} \text{ număr prim} \mid a + b = 5\}$. Mulțimea $A - B$ este:

$$\{13, 41\} \quad \{23, 41\} \quad \{13, 14\} \quad \emptyset \quad \{13, 31\}$$

3. Mulțimea numerelor naturale de forma $\overline{12x}$ care se divid cu 3 are cardinalul egal cu:

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 7$$

4. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 10 < 5x + 2 < 40\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ este multiplu al lui } 5\}$. Mulțimea $A \cap B$ este:

$$\{5, 10\} \quad \{5\} \quad \{0, 15\} \quad \emptyset \quad \{10, 15\}$$

5. Valoarea lui x astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, x\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{2, 4, 6\} \text{ este:}$$

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

6. Cardinalul mulțimii numerelor naturale prime de forma $\overline{a7}$ este egal cu:

$$7 \quad 2 \quad 6 \quad 4 \quad 5$$

7. Mulțimea tuturor numerelor naturale de forma $\overline{a4}$ care sunt pătrate perfecte este egală cu:

$$\{14\} \quad \{24, 34\} \quad \{44\} \quad \{64\} \quad \{14, 74\}$$

8. Arătați că numerele $\overline{3aaa}$ și $\overline{6aaa}$ nu sunt prime între ele. Ambele se divid cu:

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

9. Se consideră mulțimile:

$$A = \{\overline{ab} \mid a + b = 4\} \text{ și } B = \{\overline{ab} \mid a - b = 4\}$$

Calculați $\text{card } B - \text{card } A$ și arătați că este egal cu:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

Testul 6

1. Soluția ecuației:

$$\left[x(1+2+\dots+6) \right] : (1+2+\dots+20) = 1$$

este: **6** **7** **8** **9** **10**

2. Numărul prim care adunat cu următorul număr prim dă suma 30 este:

7 **11** **13** **17** **19**

3. Numere naturale prime de forma \overline{aaa} sunt:

zero **unu** **două** **trei** **patru**

4. Fie: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{1, 2, 3, 6, x\}$, unde $x \in \mathbf{N}$.

Valoarea lui x , astfel încât $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

5. Produsul numerelor prime de forma $\overline{2a}$ este mai mare decât suma numerelor prime de forma $\overline{2a}$ cu:

600 **605** **610** **615** **620**

6. Numărul natural prim a care verifică relația:

$$(a+4)(a+6) = 143$$

este: **2** **3** **5** **7** **11**

7. Numărul natural: $2^{n+1} \cdot 3^{n+2} + 2^{n+2} \cdot 3^{n+1}$ se divide cu un număr de numere prime egal cu:

zero **unu** **două** **trei** **patru**

8. Suma numerelor prime de forma $\overline{1a}$ se scrie ca suma a douăsprezece numere prime egale cu:

3 **5** **7** **11** **13**

9. Numărul natural de forma $\overline{1x2} + \overline{11x}$ care se divide cu 100 este egal cu:

100 **200** **300** **400** **500**

Testul 7

1. Numere naturale de forma $\overline{a3a}$ care se divid cu 3 sunt:

unu două trei patru cinci

2. Numere naturale mai mici decât 100 și care sunt divizibile cu 20 sunt: **unu două trei patru cinci**

3. Scrieți numărul natural $1+2+\dots+14$ ca produsul a trei numere prime. Dacă la suma acestor numere prime adăugăm 1, obținem pătratul unui număr. Valoarea acestuia este:

1 2 3 4 5

4. Scrieți numărul natural $1+2+\dots+10$ ca produsul a două numere prime. Suma numerelor prime se scrie ca pătratul unui număr natural. Valoarea acestuia este:

1 2 3 4 5

5. Cel mai mic număr prim care adunat cu alt număr prim dă suma 30 este:

7 11 13 17 19

6. Scrieți numărul natural $1+2+\dots+6$ ca produsul a două numere prime. Diferența numerelor prime este egală cu:

1 2 3 4 5

7. Suma numerelor prime de forma $\overline{3a}$ se scrie ca produsul unui număr prim cu pătratul unui număr. Valoarea numărului prim este egală cu:

21 15 13 17 19

8. Diferența a două numere prime este 2. Suma numerelor prime este egală cu pătratul unui număr natural par. Cel mai mic dintre cele două numere prime este:

13 17 19 23 29

9. Numărul prim a care verifică relația: $a(a-4) = 221$ este: **13 17 19 23 29**

CUPRINS

Enunț. Rez.

1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale.	5	147
1.1 Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice / nenumerice; relația dintre un element și o mulțime. Relații între mulțimi	5	147
1.2 Mulțimi finite. Cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale	8	148
1.3 Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență.	10	149
1.4 Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun. Numere prime între ele	16	150
1.5 Proprietăți ale divizibilității în \mathbb{N}	21	154
1.6 Teste grilă de autoevaluare	23	156
Testul 1	23	156
Testul 2	24	156
Testul 3	25	157
Testul 4	26	157
Testul 5	27	157
Testul 6	28	158
Testul 7	29	158
2. Rapoarte. Proporții	30	159
2.1 Rapoarte; proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor. Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție; procente; proporții derivate.	30	159
2.1.1 Rapoarte	30	159
2.1.2 Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor. Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție.	31	159
2.1.3 Procente; problem în care intervin procente	32	160
2.2 Șir de rapoarte egale; mărimi direct propor-		

ționale; regula de trei simplă	36	162
2.3 Șir de rapoarte egale; mărimi invers proporționale; regula de trei simplă	39	164
2.4 Elemente de organizarea datelor. Reprezentarea datelor prin grafice în contextual proporționalității. Probabilități	42	166
2.5 Teste grilă de evaluare	44	166
Testul 1	44	166
Testul 2	45	166
Testul 3	46	167
Testul 4	47	167
Testul 5	48	168
Testul 6	49	168
3. Mulțimea numerelor întregi	50	169
3.1 Mulțimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axa numerelor; modulul unui număr întreg; compararea și ordonarea numerelor întregi	50	169
3.2 Adunarea numerelor întregi, proprietăți	53	170
3.3 Scăderea numerelor întregi	54	170
3.4 Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți	55	171
3.5 Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	56	171
3.6 Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul; reguli de calcul cu puteri	58	172
3.7 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	60	173
3.8 Ecuații, inecuații, problem care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor / inecuațiilor în contextual numerelor întregi	61	173
3.9 Teste grilă de evaluare	63	174
Testul 1	63	174
Testul 2	64	174
Testul 3	65	175
Testul 4	66	175
Testul 5	67	176

Testul 6	68	176
Testul 7	69	176
4. Mulțimea numerelor raționale	70	177
4.1 Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul. Compararea și ordonarea numerelor raționale	70	177
4.2 Adunarea numerelor raționale. Proprietăți. Scăderea numerelor raționale	73	177
4.3 Înmulțirea numerelor raționale. Proprietăți ...	77	178
4.4 Împărțirea numerelor raționale	79	180
4.5 Ridicarea la putere cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri	81	180
4.6 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	82	181
4.7 Ecuații în mulțimea numerelor raționale		
Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	84	182
4.8 Teste grilă de evaluare	87	184
Testul 1	87	184
Testul 2	88	185
Testul 3	89	185
Testul 4	90	186
Testul 5	91	186
Testul 6	92	187
Testul 7	93	187
5. Noțiuni geometrice fundamentale	94	188
5.1 Unghiuri opuse la vârf, congruența lor. Unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare	94	188
5.2 Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	97	189
5.3 Drepte paralele. Axioma dreptelor paralele. Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte cu o secantă). Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice)	100	191
5.4 Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Aplicații		

practice în poligoane și corpuri geometrice. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă	103	192
5.5 Cerc. Elemente în cerc: centru, rază, coardă, diametru, arc de cerc, unghi la centru. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.	106	193
5.6 Teste grilă de evaluare	109	194
Testul 1	109	194
Testul 2	110	195
6. Triunghiul	111	195
6.1 Triunghiul: definiție, elemente, clasificare. Perimetrul unui triunghi. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi. Teorema unghiului exterior	111	195
6.2 Construcția triunghiurilor	115	199
6.3 Linii importante în triunghi: bisectoare, mediatoare, înălțime, mediană. Concurența lor. Cercul înscris, cercul circumscris unui triunghi. Congruența triunghiurilor oarecare. Congruența triunghiurilor dreptunghice. Metoda triunghiurilor congruente	117	200
6.4 Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi sau mediatoarea unui segment	120	201
6.5 Proprietăți ale triunghiului isoscel. Proprietăți ale triunghiului echilateral	123	203
6.6 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	129	208
6.7 Teste grilă de evaluare	132	211
Testul 1	132	211
Testul 2	133	211
Testul 3	134	212
Testul 4	135	213
Testul 5	136	213
7. Teste grilă de autoevaluare finale	137	213
Testul 1	137	213
Testul 2	138	214
Testul 3	139	214
Testul 4	140	215

Testul 5	141	215
Testul 6	142	216
Testul 7	143	216
Testul 8	144	217
Testul 9	145	217
Testul 10	146	218