GEOMETRIE

4. Patrulatere

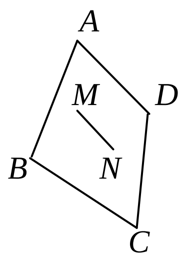
4.1 Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție

a) Se numește **patrulater** figura geometrică $ABCD$ formată din reuniunea a patru segmente $[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup$ $\cup [DA]$.

b) Se numește patrulater convex, patrulaterul *ABCD* care are proprietatea că oricare ar fi două puncte M, N în interiorul patrulaterului, rezultă că segmental (MN) este tot în interiorul patrulaterului.



2. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360^o.

b) Probleme rezolvate

1. Fie *ABCD* un patrulater convex astfel încât să avem:

$$3m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) \text{ și}$$
$$3m(\hat{C}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(D).$$

Demonstraţi că:

a) $\hat{A} \equiv \hat{C}$ b) $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180^o$.

Soluție. a) $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D})$=$360^o$ şi $3m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D})$$\Rightarrow m(\hat{A}) + 3m(A) =$ $= 360^o$$\Rightarrow m(\hat{A}) = 90^o$. Analog $m(\hat{C}) = 90^o$.

b) $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 360^o - m(\hat{A}) - m(\hat{C}) = 180^o$.

2. Determinaţi măsurile unghiurilor unui patrulater convex *ABCD*, ştiind că $m(\widehat{D}) = m(\hat{C}) + 10^o = m(\hat{B}) + 20^o =$
$= m(\hat{A}) + 30^o$.

Soluție. Notăm cu *x* măsura unghiului *D*. Atunci avem:
$\widehat{D} = x;\ \hat{C} = x - 10°;\ \hat{B} = x - 20°;\ \hat{A} = x - 30°$ și
$x - 30° + x - 20° + x - 10° + x = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x - 60° = 360° \Rightarrow 4x = 420° \Rightarrow x = 105°$. Atunci:
$\hat{A} = 105° - 30° = 75°;\ \hat{B} = 105° - 20° = 85°;\ \hat{C} =$
$= 105° - 10° = 95°;\ \widehat{D} = 105°$.

3. Fie *ABCD* un patrulater convex în care unghiurile $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ sunt suplementare. Demonstraţi că :

a) $AD||BC$;

b) Bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ sunt perpendiculare.

Soluție. a) $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ sunt suplementare, de unde rezultă $m(\hat{A}) + m(\hat{B})$=180^o. Prelungim pe *BA* dincolo de *A* şi luăm pe această prelungire punctul *E*. Avem : $m(\widehat{DAE}) = 180^o -$
$-m(\widehat{DAB}) = 180^o - (180^o - m(\hat{B})) = m(\hat{B}) \Rightarrow AD \parallel BC$.

b) Fie *O* punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\hat{A}$ şi $\hat{B}$. Atunci $m(\widehat{AOB}) = 180^o - m(\widehat{ABO}) - m(\widehat{BAO}) =$
$= 180^o - \frac{1}{2}m(\hat{A}) - \frac{1}{2}m(\hat{B}) = 180^o - \frac{1}{2}180^o = 90^o$.

4. Determinaţi măsurile unghiurilor unui patrulater convex *ABCD*, ştiind că acestea sunt direct proporţionale cu numerele: 1, 2, 3, 4.

Soluție. a) Avem $\frac{m(\hat{A})}{1} = \frac{m(\hat{B})}{2} = \frac{m(\hat{C})}{3} = \frac{m(\widehat{D})}{4} =$

$$= \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\widehat{D})}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{360^o}{10} = 36^o.$$

Atunci avem: $m(\hat{A}) = 36^o, m(\hat{B}) = 72^o, m(\hat{C}) = 108^o$,
$m(\widehat{D}) = 144^o$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Trei unghiuri ale unui patrulater convex au măsurile egale cu $80°$. Măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterui convex este egală cu:

$80°$ $90°$ $100°$ $110°$ $120°$

2. Un patrulater convex are două unghiuri egale cu $80°$ și $100°$. Celelalte două unghiuri sunt egale între ele și au valoarea egală cu: **$80°$ $90°$ $100°$ $110°$ $120°$**

3. Un patrulater convex are două unghiuri egale cu $100°$. Celelalte două unghiuri sunt egale între ele și au valoarea egală cu: **$80°$ $90°$ $100°$ $110°$ $120°$**

4. Un patrulater convex are un unghi egal cu $60°$. Celelalte trei unghiuri sunt egale între ele și au valoarea egală cu: **$80°$ $90°$ $100°$ $110°$ $120°$**

5. Un patrulater convex are un unghi drept. Celelalte trei unghiuri sunt egale între ele.

Numărul de unghiuri drepte ale patrulaterului este egal cu

0 1 2 3 4

6. Fie *ABCD* un patrulater convex cu unghiurile $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \widehat{D}$ direct proporționale cu 1, 2, 3, 4.

Demonstrați că $\hat{A} + \widehat{D}$ are valoarea egală cu:

$100°$ $120°$ $140°$ $160°$ $180°$

7. Fie *ABCD* un patrulater convex cu $\hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \widehat{D}$ și $\hat{A} = 2\hat{B}$. Arătați că $\hat{A}$ are valoarea egală cu:

$60°$ $90°$ $120°$ $150°$ $180°$

8. Fie *ABCD* un patrulater convex cu $\hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \widehat{D} =$ $= \hat{A} + 30°$. Arătați că $\hat{A}$ are valoarea egală cu:

$45°$ $60°$ $75°$ $90°$ $105°$

9. Determinaţi măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$, ştiind că $AB \perp AD$, iar unghiurile $\widehat{B}, \hat{C}$ şi $\widehat{D}$ sunt direct proporţionale cu 1, 2, 3.

Demonstrați că cel mai mare dintre unghiuri are măsura egală cu:

75° **90°** **120°** **135°** **150°**

10. Determinaţi măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$, ştiind că $AB \perp AD$, $BC \perp CD$ şi $\widehat{B} = 3\widehat{D}$.

Cel mai mic dintre unghiuri are măsura egală cu:

45° **60°** **75°** **90°** **105°**

11. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care unghiurile $\hat{A}$ şi C sunt suplementare.

Demonstraţi că $\widehat{B} + \widehat{D}$ are valoarea:

90° **120°** **150°** **175°** **180°**

12. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care unghiurile $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ sunt suplementare. Demonstraţi că $AD \parallel BC$ și apoi arătați că unghiul făcut de bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ are valoarea:

45° **60°** **75°** **90°** **120°**

13. Fie $ABCD$ un patrulater convex astfel încât să avem $AC \perp BD$ şi punctul $O = AC \cap BD$ este mijlocul segmentului $[BD]$.

Demonstraţi că unghiul $\widehat{ABC}$ este congruent cu:

$\boldsymbol{\widehat{ADC}}$ $\boldsymbol{\widehat{ADC}}$ $\boldsymbol{\widehat{ADC}}$ $\boldsymbol{\widehat{ADC}}$ $\boldsymbol{\widehat{ADC}}$

14. Fie $ABCD$ un patrulater convex , astfel încât măsura fiecărui unghi al patrulaterului să fie media aritmetică a măsurilor celorlalte unghiuri.

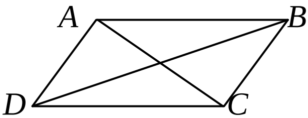
Demonstraţi că unghiul $\hat{A}$ are măsura egală cu:

45° **60°** **75°** **90°** **120°**

4.2 Paralelogram: proprietăţi. Linie mijlocie în triunghi. Proprietăţi. Centrul de greutate al unui triunghi

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție. Un patrulater convex, care are laturile opuse paralele două câte două se numește **paralelogram**.



$[AD], [BC]$ și respectiv $[AB], [CD]$ sunt perechile de laturi opuse, iar $[AC]$ și $[BD]$ sunt diagonalele paralelogramului.

2. Proprietăți.

a) referitoare la laturi

– Într-un paralelogram laturile opuse sunt congruente două câte două;

– Dacă într-un patrulater convex laturile opuse sunt congruente două câte două, atunci patrulaterul este paralelogram;

– Dacă într-un patrulater convex două laturi opuse sunt congruente și paralele, atunci patrulaterul este paralelogram;

b) referitoare la unghiuri

– Într-un paralelogram unghiurile opuse sunt congruente două câte două;

– Într-un paralelogram oricare două unghiuri consecutive sunt suplementare;

– Dacă într-un patrulater convex unghiurile opuse sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram;

c) referitoare la diagonale

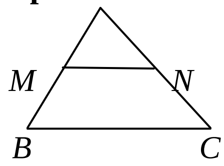
– Într-un paralelogram diagonalele se intersectează determinând pe fiecare diagonală segmente congruente;

– Dacă într-un patrulater convex diagonalele se intersectează determinând pe fiecare diagonală segmente congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

3. Definiție. Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește **linie mijlocie**.

4. Teoremă. Într-un triunghi segmentul care unește mijloacele a două laturi (linia mijlocie) este paralel cu a treia latură a triunghiului și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.

Exemplu. *A*



M, N mijloacele lui $[AB], [AC]$

$MN || BC$ și $MN = \frac{BC}{2}$

5. Teorema reciprocă. Într-un triunghi paralela dusă prin mijlocul unei laturi la o altă latură a triunghiului intersectează a treia latură în mijlocul acesteia, iar segmentul determinat are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii cu care este paralel.

6. Teoremă. Într-un triunghi medianele sunt concurente într-un punct ***G***, care se numește centrul de greutate al triunghiului și care este situat pe fiecare mediană la două treimi de vârf și o treime de bază.

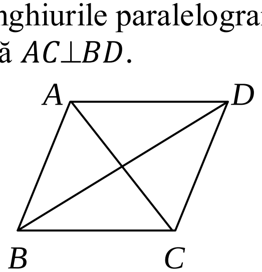
b) Probleme rezolvate.

1. Fie $ABCD$ un paralelogram astfel încât triunghiul *ABC* să fie echilateral.

a) Determinaţi unghiurile paralelogramului.

b) Demonstraţi că $AC \perp BD$.

Soluție.



a) ΔABC este echilateral, de unde $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB} = 60°$.

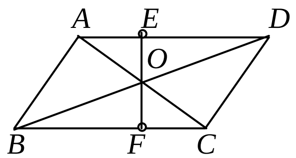
Atunci $m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 60^o$ și

$m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = m\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAD}) = 60° + 60° = 120^o$.

b) ΔABD este isoscel, AC este bisectoare, de unde rezultă că AC este înălţime, deci $AC \perp BD$.

2. Fie $ABCD$ un paralelogram, $O = AC \cap BD$ şi punctele $E \in [AD]$ şi $F \in [BC]$ astfel încât $[AE] \equiv [FC]$. Atunci:
a) patrulaterul *AFCE* este paralelogram;
b) punctele E, O, F sunt coliniare.

Soluție.



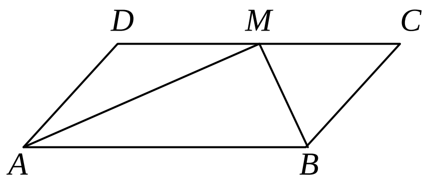
a) $[AE] \equiv [CF]$. Cum $AE \parallel CF$, rezultă că *AFCE* este paralelogram.
b) *AFCE* este paralelogram, de unde rezultă că *EF* trece prin *O* mijlocul lui $[AC]$, și deci punctele E, O, F sunt coliniare.

3. Fie *ABCD* un paralelogram şi $M, N \in [DB]$ astfel încât $[DM] \equiv [MN] \equiv [NB]$. Demonstraţi că patrulaterul *ANCM* este paralelogram.

Soluție. $\Delta ABN \equiv \Delta CDM \Rightarrow [AN] \equiv [CM]$. Analog $[AM] \equiv [CN]$, deci *ANCM* este paralelogram.

4. Fie *ABCD* un paralelogram. Demonstrați că bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$ se intersectează pe segmentul $[CD]$ dacă şi numai dacă $AB = 2 \cdot BC$.

Soluție.



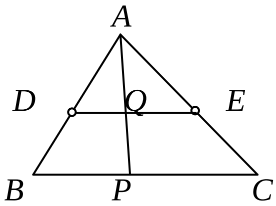
Fie M punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\hat{A}$ şi $\hat{B}$. Avem:

$M \in [DC] \Leftrightarrow \Delta DAM$ și ΔCBM sunt isoscele $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow MC = MD = AD \Leftrightarrow CD = 2BC \Leftrightarrow AB = 2BC$.

5. Fie ABC un triunghi oarecare, D, E mijloacele laturilor $[AB]$ şi respectiv $[AC]$ şi $P \in (BC)$ un punct arbitrar. Demonstraţi că DE trece prin mijlocul lui $[AP]$.

Soluție.



În $\Delta ABC, DE$ este linie mijlocie, de unde $DE \| BC$.
Fie $Q = [AP] \cap [DE]$. Evident $DQ \| BP$ şi cum D este mijlocul lui $[AB]$, rezultă că, Q este mijlocul lui $[AP]$.

6. În triunghiul isoscel $ABC(AB = AC)$ se duc medianele AM, BN, CP care se intersectează în punctul G. În punctul C se duce perpendiculara pe BC, care intersectează mediana BN în punctul D. Demonstrați că $AGCD$ este paralelogram.

Soluție $AM \perp BC, CD \perp BC \Rightarrow CD \| AM \Rightarrow AG \| CD$ (1).
AM este mediană în triunghiul $ABC \Rightarrow AG = 2 \cdot GM$ (2).
GM este linie mijlocie în triunghiul $BCD \Rightarrow CD = 2 \cdot GM$ (3).
Din (2) şi (3) rezultă $AG = CD$ (4). Din (1) şi (4) obţinem că patrulaterul $AGCD$ este paralelogram.

7. Se consideră triunghiul ABC şi se notează cu M şi N mijloacele laturilor $[AB]$ respectiv $[AC]$. Pe prelungirea segmentului $[MN]$ se consideră punctul P astfel încât $[MN] \equiv [NP]$. Demonstrați că $m(\hat{ACB}) = m(\hat{NAP}) + m(\hat{NPA})$.

Soluție. $MP \| BC \Rightarrow m(\hat{ACB}) = m(\hat{CNP})$ (1).

Însă $\widehat{CNP}$ este unghi exterior ΔANP, de unde:
$m(\widehat{CNP}) = m(\widehat{NAP}) + m(\widehat{NPA})$.
Atunci $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{NAP}) + m(\widehat{NPA})$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $\hat{A} = 60°$. Arătați că unghiul $\hat{B}$ are măsura:

$\mathbf{60°}$ $\mathbf{90°}$ $\mathbf{120°}$ $\mathbf{150°}$ **180°**

2. Unghiul exterior al unghiului $\hat{A}$ al unui paralelogram $ABCD$ are măsura de 75°. Arătați că unghiul $\hat{C}$ al paralelogramului are măsura egală cu:

$\mathbf{75°}$ $\mathbf{90°}$ $\mathbf{105°}$ $\mathbf{120°}$ **135°**

3. Fie $ABCD$ un paralelogram astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral și $O = AC \cap BD$. Calculați unghiul $\widehat{AOB}$ și arătați că are măsura egală cu:

$\mathbf{45°}$ $\mathbf{60°}$ $\mathbf{75°}$ $\mathbf{90°}$ **105°**

4. Fie $ABCD$ un paralelogram astfel încât $AB = 2AD$ și M mijlocul lui AB. Notăm cu $a = \widehat{DAB}$. Arătați că $\widehat{DMC}$ are măsura egală cu:

$\mathbf{60°}$ $\mathbf{60° + \boldsymbol{a}}$ $\mathbf{90° - \boldsymbol{a}}$ $\mathbf{90°}$ $\mathbf{90° + \boldsymbol{a}}$

5. Se consideră punctele: $A(0, 2), B(3, 0), C(5,1), D(2, 3)$. Arătați că $ABCD$ este paralelogram și cea mai mică latură a lui are lungimea egală cu:

$\mathbf{\sqrt{5}}$ $\mathbf{\sqrt{6}}$ $\mathbf{\sqrt{7}}$ $\mathbf{\sqrt{8}}$ $\mathbf{\sqrt{9}}$

6. Se consideră punctele: $A(-1,1), B(1, 4), C(8, 4), D(6,1)$. Arătați că $ABCD$ este paralelogram și cea mai mare latură a lui are lungimea egală cu:

5 **6** **7** **8** **9**

7. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 2BC, \hat{B} = 60°$ și M mijlocul laturii CD. Calculați unghiul $\widehat{AMC}$ și arătați că are măsura egală cu:

$\mathbf{100°}$ $\mathbf{110°}$ $\mathbf{120°}$ $\mathbf{130°}$ **140°**

8. Fie *ABCD* un paralelogram cu $AB = BC$ și $O = AC \cap$ $\cap BD$. Calculați unghiul $\widehat{AOB}$ și arătați că are măsura egală cu:

$\mathbf{60°}$ $\mathbf{70°}$ $\mathbf{90°}$ $\mathbf{105°}$ **120°**

9. Fie *ABCD* un paralelogram și $M, N \in BD$ astfel încât $BM = MN = ND$. Arătați că $AM^2 + AN^2$ este egală cu:

$\boldsymbol{AB}$ $\boldsymbol{AD}$ $\boldsymbol{DB}$ $\boldsymbol{CM^2 + CN^2}$ $\boldsymbol{BM^2 + BN^2}$

10. Fie *ABCD* un paralelogram cu $\hat{A} = 60°$. Pe *AD* dincolo de *D* se ia punctul *M* astfel încât $DM = DC$.

Calculați unghiul $\widehat{DMC}$ și arătați că are măsura egală cu:

$\mathbf{30°}$ $\mathbf{60°}$ $\mathbf{75°}$ $\mathbf{45°}$ $\mathbf{90°}$

11. Fie *ABCD* un paralelogram. Bisectoarelor unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ se intersectează în *I*.

Calculați unghiul $\widehat{AIB}$ și arătați că are măsura egală cu:

$\mathbf{30°}$ $\mathbf{60°}$ $\mathbf{75°}$ $\mathbf{45°}$ $\mathbf{90°}$

12. Fie *ABCD* un patrulater cu diagonalele *AC* și *BD* perpendiculare. Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, CD.

Calculați unghiul $\widehat{MNP}$ și arătați că are măsura egală cu:

$\mathbf{30°}$ $\mathbf{60°}$ $\mathbf{75°}$ $\mathbf{45°}$ $\mathbf{90°}$

13. Fie *ABCD* un paralelogram în care bisectoarea lui $\hat{A}$ intersectează segmentul [*CD*] în punctul *E*, iar bisectoarea lui $\hat{C}$ intersectează segmentul [*AB*] în punctul *F* .

Demonstraţi că patrulaterul *AFCE* este paralelogram și arătați că segmentul *BE* este congruent cu segmentul:

DE ***DF*** ***DA*** ***DB*** ***AB***

14. Fie *ABCD* un patrulater cu $AC \perp BD, O = AC \cap BD$ și M, N, P mijloacele laturilor AB, BO, AO.

Calculați unghiul $\widehat{NMP}$ și arătați că are măsura egală cu:

$\mathbf{30°}$ $\mathbf{60°}$ $\mathbf{75°}$ $\mathbf{45°}$ $\mathbf{90°}$

15. Fie ABC un triunghi oarecare cu perimetrul egal cu 20 cm și D, E, F mijloacele laturilor AB, BC, CA. Calculați perimetrul triunghiului DEF și arătați că este egal cu:

7 cm **8 cm** **9 cm** **10 cm** **11 cm**

16. Fie ABC un triunghi cu $\hat{A} = 45°$ și D, E, F mijloacele laturilor AB, BC, CD. Arătați că $\widehat{ADE} \equiv \widehat{AFE}$ și au valoarea comună egală cu:

$\mathbf{90°}$ $\mathbf{115°}$ $\mathbf{120°}$ $\mathbf{135°}$ $\mathbf{150°}$

17. Fie ABC un triunghi dreptunghic în $\hat{A}$ și D, E, F mijloacele laturilor AB, BC, CD. Calculați $\widehat{DEF}$ și arătați că are măsura egală cu: $\mathbf{60°}$ $\mathbf{75°}$ $\mathbf{90°}$ $\mathbf{105°}$ $\mathbf{120°}$

18. Pe prelungirile laturilor $[BC]$ şi $[CA]$ ale triunghiului echilateral ABC luăm punctele D şi E astfel încât $CD \equiv AE \equiv \equiv AB$. Dreptele DE şi AB se intersectează în F.

Demonstrați egalitatea $AB = k \cdot AF$, unde k ia valoarea:

1 **2** **3** **4** **5**

19. Fie triunghiul ABC, în care $[AD]$ este mediană. Luăm P mijlocul medianei $[AD]$ şi $\{N\} = CP \cap AB$.

Demonstrați egalitatea: $NB = k \cdot NA$, unde k ia valoarea:

1 **2** **3** **4** **5**

20. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $[AD]$ înălţimea şi $[AE]$ mediana. Înălţimea din D a triunghiului ADC trece prin mijlocul medianei $[AE]$.

Demonstrați că $\hat{B} = k \cdot \hat{C}$, unde k ia valoarea:

1 **2** **3** **4** **5**

21. Se consideră triunghiul isoscel $ABC(AB = AC)$, M mijlocul lui AC şi D un punct pe semidreapta $(BM$ astfel încât $AB = AD$. Fie E şi F mijloacele segmentelor AB şi AD.

Demonstrați că $CE + CF = k \cdot EF$, unde k ia valoarea:

1 **2** **3** **4** **5**

CUPRINS