

2. Calcul algebric în R

2.2 Formule de calcul prescurtat

a) Noțiuni teoretice și exemple

Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ atunci avem următoarele formule:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Observație. Literele a și b pot fi înlocuite cu alte litere sau numere în funcție de caz.

Exemple. a) $(2a + b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$.

b) $(3a - 5)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5 + 5^2 = 9a^2 - 30a + 25$.

c) $(5x + 4)(5x - 4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$.

b) Probleme rezolvate

1. Calculați:

- a) $(3x + 2y)^2$ b) $(2a - 7)^2$ c) $(4a + 3)(4a - 3)$.

Soluție. a) $(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$.

b) $(2a - 7)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 7 + 7^2 = 4a^2 - 28a + 49$.

c) $(4a + 3)(4a - 3) = (4a)^2 - 3^2 = 16a^2 - 9$.

2. Calculați: $(3a - 2)^2 + (2a + 3)^2 - 13a^2 - 10$.

Soluție. $(3a - 2)^2 + (2a + 3)^2 - 13a^2 - 10 - 13a^2 - 10 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2 + 2^2 + (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 - 13a^2 - 10 = 9a^2 - 12a + 4 + 4a^2 + 12a + 9 - 13a^2 - 10 = 13 - 10 = 3$.

3. Calculați: $(a + 3b)(a - 3b) + (a + b)^2 - 2(a + 2b)^2$.

Soluție. $(a + 3b)(a - 3b) + (a + b)^2 - 2(a + 2b)^2 = a^2 - (3b)^2 + a^2 + 2ab + b^2 - 2(a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2) = a^2 - 9b^2 + a^2 + 2ab + b^2 - 2(a^2 + 4ab + 4b^2) = 2a^2 - 8b^2 + 2ab - 2a^2 - 8ab - 8b^2 = -16b^2 - 6ab$.

4. Calculați: $(x + y)^2 + (x + 2y)^2 - (2x + 3y)(2x - 3y)$.

Soluție. $(x + y)^2 + (x + 2y)^2 - (2x + 3y)(2x - 3y) = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 4xy + (2y)^2 + (2x)^2 - (3y)^2 = 2x^2 + 6xy + y^2 + 4y^2 + 4x^2 - 9y^2 = 6x^2 + 6xy - 4y^2$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Forma cea mai simplă a expresiei: $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$
este: x $2x$ $4x$ $2x^2$ $2x^2 + 2$

2. Forma cea mai simplă a expresiei: $(x + y)^2 + (x - y)^2$
este: xy $2xy$ $4xy$ $2(x^2 + y^2)$ $2x^2 + y^2$

3. Forma cea mai simplă a expresiei: $(x + y)^2 - (x - y)^2$
este: xy $2xy$ $4xy$ $2x^2$ $2x^2 + 2y^2$

4. Forma cea mai simplă a expresiei:
 $(xy + 1)^2 + (x + y)^2 - x^2 - y^2 - (xy)^2$
este: xy $2xy + 1$ $4xy + 1$ 1 2

5. Forma cea mai simplă a expresiei:
 $(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 2)^2 + (x^2 + 3)^2 - (x^2 + 6)^2 + 22$
este: x^4 $2x^4$ $3x^4$ $x^4 + x^2$ $x^4 - x^2$

6. Forma cea mai simplă a expresiei:
 $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$
este: $x^4 - 1$ $x^8 - 1$ $x^8 + 1$ $x^{16} - 1$ $x^{16} + 1$

7. Forma cea mai simplă a expresiei:
 $(x - 1)(x + 1) - (x - y)^2 + (x + y)^2 - x^2 + 1$
este: $x^2 + y^2$ $x + y$ $4xy$ $x^2 + 1$ 2

8. Forma cea mai simplă a expresiei:
 $(a^2 + b)(a^2 - b) + (b + a)(b - a)$
este: $1 - 2ab$ $-2b^2$ $a^4 - a^2$ $2a^2$ ab

9. Forma cea mai simplă a expresiei:
 $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + 2x^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$
este: $2(x^4 - y^4)$ $x^4 + y^4$ x^2y^2 $x^2 + y^2$ 2

10. Forma cea mai simplă a expresiei:
 $(x + y)^2 + (x + 2y)^2 - (x + 3y)^2 - (x + 2y)(x - 2y)$
este: $x^2 + y^2$ $x - y$ $2xy$ x^2 0

2.3 Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în R (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul prescurtat)

a) Noțiuni teoretice și exemple

a) Descompunerea în factori folosind formulele de calcul prescurtat:

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;

2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$;

3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

Exemple. a) $a^2 + 10a + 25 = (a + 5)^2$;

b) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$;

c) $a^2 - 25 = (a - 5)(a + 5)$.

b) Descompunerea în factori folosind metoda factorului comun:

1. $ab + ac = a \cdot (b + c)$;

2. $ba + ca = (b + c) \cdot a$;

3. $ab - ac = a \cdot (b - c)$;

4. $ba - ca = (b - c) \cdot a$.

Exemple. a) $ax + 7a = a(x + 7)$; b) $ax - 7x = (a - 7)x$

b) $2x + 4ax + x^2 = (2 + 4a + x)x$;

c) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$.

c) Descompunerea în factori folosind metoda grupării și a factorului comun:

Exemple. a) $a^2 - 5a + 4 = a^2 - a - 4a + 4 = a(a - 1) - 4(a - 1) = (a - 1)(a - 4)$.

b) $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(2x - 3)$.

b) Probleme rezolvate

1. Descompuneți în factori:

a) $ab + a + b + 1$

b) $abc + ab + c + 1$

Soluție. a) $ab + a + b + 1 = (ab + a) + b + 1 = a(b + 1) + (b + 1) = (b + 1)(a + 1)$.

b) $a^2 + 3a + 2 = a^2 + a + 2a + 2 = a(a + 1) + 2(a + 1) = (a + 1)(a + 2)$.

2. Descompuneți în factori:

a) $x^4 + 3x^2 + 2$

b) $a^2 + a + b + ab$

Soluție. a) $x^4 + 3x^2 + 2 = x^4 + x^2 + 2x^2 + 2 =$
 $= x^2(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2).$

b) $a^2 + a + b + ab = a(a + 1) + b(a + 1) = (a + 1)(a + b).$

3. Descompuneți în factori:

a) $abc - ab + c - 1$ b) $a^3 + a^2 + 5a + 5$

Soluție. a) $abc - ab + c - 1 = ab(c - 1) + (c - 1) =$
 $= (c - 1)(ab + 1).$

b) $a^3 + a^2 + 5a + 5 = a^2(a + 1) + 5(a + 1) = (a + 1)(a^2 + 5).$

4. Descompuneți în factori: $a^2 + 2ab + b^2 - 25.$

Soluție. a) $a^2 + 2ab + b^2 - 25 = (a + b)^2 - 5^2 =$
 $= (a + b + 5) \cdot (a + b - 5).$

5. Descompuneți în factori: $a^4 + a^2 + 1.$

Soluție. $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 =$
 $= (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a) = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$

6. Descompuneți în factori: $abc^2 + c^2 - ab - 1.$

Soluție. $abc^2 + c^2 - ab - 1 = c^2(ab + 1) - (ab + 1) =$
 $= (ab + 1)(c^2 - 1) = (ab + 1)(c + 1)(c - 1).$

7. Descompuneți în factori: $a^2b^2 + 4ab + 4 - b^2.$

Soluție. $a^2b^2 + 4ab + 4 - b^2 = (ab + 2)^2 - b^2 =$
 $= (ab + 2 + b) \cdot (ab + 2 - b).$

8. Descompuneți în factori: $a^4 - 16.$

Soluție. $a^4 - 16 = (a^2)^2 - 4^2 = (a^2 + 4)(a^2 - 4) =$
 $= (a^2 + 4)(a^2 - 2^2) = (a^2 + 4)(a + 2)(a - 2).$

9. Descompuneți în factori: $3a^4 + 2a^2 - 1.$

Soluție. $3a^4 + 2a^2 - 1 = 3a^4 + 3a^2 - a^2 - 1 =$
 $= 3a^2(a^2 + 1) - (a^2 + 1) = (a^2 + 1)(3a^2 - 1).$

10. Descompuneți în factori: $a^4 - 2bc - b^2 - c^2.$

Soluție. $a^4 - 2bc - b^2 - c^2 = a^4 - (b^2 + 2bc + c^2) =$
 $= (a^2)^2 - (b + c)^2 = (a^2 + b + c)(a^2 - b - c).$

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Descompusă în factori expresia $a^2 - 100$ devine:

$$(a + 9)(a - 9) \quad a(a + 10) \quad (a - 10)(a + 10)$$

2. Descompusă în factori expresia $a^2 + 10a + 25$ devine:

$$(a + 5)(a - 5) \quad (a + 10)^2 \quad (a + 5)^2$$

3. Descompusă în factori expresia $4a^2 - 20a + 25$ devine:

$$(2a + 5)(2a - 5) \quad (2a - 5)^2 \quad (2a + 5)^2$$

4. Descompusă în factori expresia $a^2 - 8a + 16$ devine:

$$(a + 4)(a - 4) \quad (a - 4)^2 \quad (a + 4)^2$$

5. Descompusă în factori expresia $4a^2 - 25$ devine:

$$(a + 5)(a - 5) \quad (2a + 5)^2 \quad (2a + 5)(2a - 5)$$

6. Descompusă în factori expresia $25a^2 - 20a + 4$ devine:

$$(5a - 4)(5a + 4) \quad (5a - 2)^2 \quad (5a + 2)^2$$

7. Descompusă în factori expresia $9a^2 - 42a + 49$ devine:

$$(3a + 7)(3a - 7) \quad (3a + 7)^2 \quad (3a - 7)^2$$

8. Descompusă în factori expresia $(a + 4)^2 - (a + 1)^2$ devine:

$$a(2a + 2) \quad 3(2a + 5) \quad a(2a + 4)$$

9. Descompusă în factori expresia $(2a + 3)^2 - (a + 1)^2$ devine:

$$(a + 1)(2a + 3) \quad (a + 3)(2a + 5) \quad (a + 2)(3a + 4)$$

10. Descompusă în factori expresia $(2a + 1)^2 - a^2$ devine:

$$(a + 1)(3a + 1) \quad (a + 1)(2a + 1) \quad (a + 2)(a + 3)$$

11. Descompusă în factori expresia $(a + 1)^2 - (a - 1)^2$ devine:

$$(a + 1)(a - 1) \quad 3(a + 1) \quad 4a$$

12. Descompusă în factori expresia $a^2 - 3a + 2$ devine:

$$(a - 1)(a - 2) \quad (a + 1)(a + 2) \quad a(a - 3)$$

13. Descompusă în factori expresia $a^2 + 7a + 12$ devine:

$$(a + 3)(a + 4) \quad (a + 2)(a + 4) \quad (a + 3)(a + 2)$$

14. Descompusă în factori expresia $a^2 - 10a + 9$ devine:

$$(a + 1)(a + 9) \quad (a + 3)(a + 6) \quad (a - 1)(a - 9)$$

15. Descompusă în factori expresia $a^3 + 2a^2 + a + 2$ devine:

$$(a^2 + 1)(a + 2) \quad (a + 1)(a^2 + 1) \quad (a + 2)(a^2 - 1)$$

16. Descompusă în factori expresia $a^2c + b^2c + a^2 + b^2$ devine:

$$(c - 1)(a^2 + b^2) \quad (c + 1)(a^2 + b^2) \quad (c + 1)(a + b)$$

17. Descompusă în factori expresia $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ devine:

$$(c + b)(a + b) \quad (a + b + c)(a + b - c) \quad (c + a)(a + b + c)$$

18. Descompusă în factori expresia $a^3 + 2a^2 + 2a + 4$ devine:

$$(a^2 + 2)(a + 2) \quad (a + 1)(a^2 + 2) \quad (a + 2)(a^2 + 1)$$

19. Descompusă în factori expresia $(a^2 + a)^2 - 4a^2$ devine:

$$(a^2 + 3)(a + 1) \quad a^2(a + 3)(a - 1) \quad (a - 1)(a^2 + 1)$$

20. Descompusă în factori expresia $a^4 - 2a^2 + 1$ devine:

$$(a + 1)^2(a - 1)^2 \quad (a^2 + 1)^2 \quad a^2(a + 1)^2$$

21. Descompusă în factori expresia $(a^2 + a)^2 - 9a^2$ devine:

$$(a^2 + 4a)(a^2 - 2a) \quad (a^2 - 4a)(a^2 + 2a) \quad a^2(a^2 + 1)$$

22. Descompusă în factori expresia $a^3 - 2a^2 + a - 2$ devine:

$$(a^2 + 1)(a + 2) \quad (a - 2)(a^2 + 1) \quad (a + 3)(a^2 + 1)$$

23. Descompusă în factori expresia $ac^2 + bc^2 + a + b$ devine:

$$(c^2 + 1)(a + 2) \quad (a - b)(c^2 + 1) \quad (a + b)(c^2 + 1)$$

24. Descompusă în factori expresia $a^4 + 2a^3 + a + 2$ devine:

$$(a^3 + 1)(a + 1) \quad (a + 2)(a^3 + 1) \quad (a - 1)(a^3 + 1)$$

25. Descompusă în factori expresia $a^3 - 3a - 2$ devine:

$$(a^2 - 2)(a + 1) \quad (a + 1)(a^2 - a) \quad (a + 1)^2(a - 2)$$

2.4 Frații algebrice, operații cu acestea (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere)

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Dacă P, Q sunt numere reale reprezentate prin litere și $Q \neq 0$, atunci $\frac{P}{Q}$ reprezintă o fracție algebrică.

Exemple. a) $\frac{2a+3}{a+1}$, $a \neq -1$; b) $\frac{3ab-5}{ab-3}$, $ab \neq 3$; c) $\frac{5b+1}{b^2+1}$.

Observație. Dacă nu este pusă nici o condiție, se subînțelege că se lucrează în condiția ca numitorul să fie diferit de 0.

2. Frațiile algebrice se simplifică astfel:

- se descompune în factori numărătorul
- se descompune în factori numitorul
- se simplifică prin factorii comuni numărătorului și numitorului.

Exemple. a) $\frac{a^2-a}{a^2+a} = \frac{a(a-1)}{a(a+1)} = \frac{a-1}{a+1}$.

b) $\frac{a^3+2a}{a^4-4} = \frac{a(a^2+2)}{(a^2+2)(a^2-2)} = \frac{a}{a^2-2}$.

3. Două fracții algebrice ireductibile (care au fost simplificate)

$\frac{P}{Q}$ și $\frac{P'}{Q'}$ se adună astfel: $\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} = \frac{P \cdot Q' + P' \cdot Q}{QQ'}$.

Exemplu. $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} = \frac{(a+1)(a+1) + (a-1)(a-1)}{(a-1)(a+1)} =$
 $= \frac{a^2+a+a+1+a^2-a-a+1}{a^2-1} = \frac{2a^2+2}{a^2-1} = \frac{2(a^2+1)}{a^2-1}$.

4. Două fracții algebrice ireductibile (care au fost simplificate)

$\frac{P}{Q}$ și $\frac{P'}{Q'}$ se scad astfel: $\frac{P}{Q} - \frac{P'}{Q'} = \frac{P \cdot Q' - P' \cdot Q}{QQ'}$.

Exemplu. $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1} = \frac{(a+1)(a+1) - (a-1)(a-1)}{(a-1)(a+1)} =$
 $= \frac{a^2+a+a+1-(a^2-a-a+1)}{a^2-1} = \frac{a^2+a+a+1-a^2+a+a-1}{a^2-1} = \frac{4a}{a^2-1}$.

5. Două fracții algebrice ireductibile (care au fost simplificate)

$\frac{P}{Q}$ și $\frac{P'}{Q'}$ se înmulțesc astfel: $\frac{P}{Q} \cdot \frac{P'}{Q'} = \frac{P \cdot P'}{QQ'}$.

Exemplu. $\frac{a(a+1)}{a-1} \cdot \frac{a(a-1)}{a+1} = \frac{a(a+1) \cdot a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = a^2.$

6. Două fracții algebrice ireductibile (care au fost simplificate) $\frac{P}{Q}$ și $\frac{P'}{Q'}$ se împart astfel: $\frac{P}{Q} : \frac{P'}{Q'} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{Q'}{P'} = \frac{P \cdot Q'}{Q P'}.$

Exemplu. $\frac{a+1}{a(a-1)} : \frac{a-1}{a(a+1)} = \frac{a+1}{a(a-1)} \cdot \frac{a(a+1)}{a-1} = \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}.$

7. O fracție algebrice ireductibile (care a fost simplificată) $\frac{P}{Q}$ se ridică la puterea n astfel: $\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \frac{P^n}{Q^n}.$

Exemplu. Puterea 2 a fracției $\frac{a+1}{a-1}$ este $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 = \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2} = \frac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1}.$

b) Probleme rezolvate

1. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{a^2+a}{a^2-1}$; b) $\frac{a^2-4}{a^2+2a}$; c) $\frac{a^2+ab}{b^2+ab}.$

Soluție. a) $\frac{a^2+a}{a^2-1} = \frac{a(a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a}{a-1}.$

b) $\frac{a^2-4}{a^2+2a} = \frac{(a+2)(a-2)}{a(a+2)} = \frac{a-2}{a}.$

c) $\frac{a^2+ab}{b^2+ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}.$

2. Simplificați fracția: $\frac{a^4-1}{4a^2-3a-1}.$

Soluție. $\frac{a^4-1}{4a^2-3a-1} = \frac{(a^2-1)(a^2+1)}{3a^2-3a+a^2-1} = \frac{(a-1)(a+1)(a^2+1)}{3a(a-1)+(a-1)(a+1)} = \frac{(a-1)(a+1)(a^2+1)}{(a-1)(3a+a+1)} = \frac{(a-1)(a+1)(a^2+1)}{(a-1)(4a+1)} = \frac{(a+1)(a^2+1)}{4a+1}.$

3. Simplificați fracția: $\frac{ab+1-a-b}{ab-1-a+b}.$

Soluție. $\frac{ab+1-a-b}{ab-1-a+b} = \frac{ab-a-b+1}{ab-a+b-1} = \frac{a(b-1)-(b-1)}{a(b-1)+b-1} =$
 $= \frac{(b-1)(a-1)}{(b-1)(a+1)} = \frac{a-1}{a+1}.$

4. Simplificați fracția: $\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

Soluție. $\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a^2(a+b)+b^2(a+b)} =$
 $= \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b.$

5. Calculați suma: $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}.$

Soluție. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-2x+1+x^2+2x+1}{x^2-1} =$
 $= \frac{2x^2+2}{x^2-1} = \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}.$

6. Calculați suma: $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+2}.$

Soluție. $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{a+2-a+1} = \frac{3}{(a-1)(a+2)}.$

7. Calculați produsul: $\frac{a^2-4}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a+2}.$

Soluție. $\frac{a^2-4}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a+2} = \frac{(a+2)(a-2)}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{a+2} =$
 $= (a-1)(a-2).$

8. Calculați produsul: $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 \cdot \frac{a^2-1}{a}.$

Soluție. $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 \cdot \frac{a^2-1}{a} = \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{a} = \frac{(a-1)^3}{a(a+1)}.$

9. Calculați câtul: $\frac{a-1}{a+2} : \frac{a^2-1}{a^2-4}.$

Soluție. $\frac{a-1}{a+2} : \frac{a^2-1}{a^2-4} = \frac{a-1}{a+2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2-1} = \frac{a-1}{a+2} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a-2}{a+1}.$

10. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{a^2+3a+2}{(a-1)^2}.$$

Soluție. $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{a^2+3a+2}{(a-1)^2} = \frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{a^2+a+2a+2}{(a-1)^2} =$

$$= \frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{a(a+1)+2(a+1)}{(a-1)^2} = \frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a+2)}{(a-1)^2} =$$

$$= \frac{a+1}{a-1} + \frac{a+2}{a-1} = \frac{2a+3}{a-1}.$$

11. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2+1}{a^2-1}.$$

Soluție. $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2+1}{a^2-1} = \frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2+1}{(a+1)(a-1)} =$

$$= \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2 + a^2+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{a^2+2a+1 - (a^2-2a+1) + a^2+1}{a^2-1} = \frac{a^2+4a+1}{a^2-1}.$$

12. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$\frac{1}{a^2-a} + \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2-1}.$$

Soluție. $\frac{1}{a^2-a} + \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{a(a-1)} + \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a-1)} =$

$$= \frac{a+1+(a-1)+a}{a(a-1)(a+1)} = \frac{a+1+a-1+a}{a(a^2-1)} = \frac{3a}{a(a^2-1)} = \frac{3}{a^2-1}.$$

13. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{a}{a-1} + \frac{2}{a-2}.$$

Soluție. Avem: $a^2 - 3a + 2 = a^2 - a - 2a + 2 =$

$$= a(a-1) - 2(a-1) = (a-1)(a-2). \text{ Atunci:}$$

$$\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{a}{a-1} + \frac{2}{a-2} = \frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{a}{a-1} + \frac{2}{a-2} =$$

$$= \frac{1+a(a-2)+2(a-1)}{(a-1)(a-2)} = \frac{1+a^2-2a+2a-2}{(a-1)(a-2)} = \frac{a^2-1}{(a-1)(a-2)} =$$

$$= \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a-2)} = \frac{a+1}{a-2}.$$

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. După simplificare, fracția $\frac{a^2+a}{a^3+a^2}$ devine:

$$\frac{1}{a+1} \quad \frac{a}{a+1} \quad \frac{a+1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a^2}$$

2. După simplificare, fracția $\frac{a^3+a}{a^3+a^2}$ devine:

$$\frac{a^2+1}{a+1} \quad \frac{a^2+1}{a^2+a} \quad \frac{a+1}{a^2+a} \quad \frac{1}{a+1} \quad \frac{1}{a^2+1}$$

3. După simplificare, fracția $\frac{a^3-a}{a^3+a^2}$ devine:

$$\frac{a+1}{a} \quad \frac{a^2+1}{a^2-1} \quad \frac{a-1}{a} \quad \frac{a-1}{a+1} \quad \frac{a}{a^2+1}$$

4. După simplificare, fracția $\frac{a^2-4}{a^2+2a}$ devine:

$$\frac{a+1}{a} \quad \frac{a+1}{a-1} \quad \frac{a-2}{a} \quad \frac{a-1}{a+1} \quad \frac{a-2}{a+1}$$

5. După simplificare, fracția $\frac{a^3-9a}{a^3+3a^2}$ devine:

$$\frac{a-3}{a} \quad \frac{a+3}{a^2} \quad \frac{a+3}{a} \quad \frac{a-1}{a+1} \quad \frac{a}{a+1}$$

6. După simplificare, fracția $\frac{a^3+2a}{a^4-4}$ devine:

$$\frac{a+1}{a+2} \quad \frac{a^2+1}{a^2+2} \quad \frac{a-1}{a-2} \quad \frac{a}{a+2} \quad \frac{a}{a^2-2}$$

7. După simplificare, fracția $\frac{a^2-3a+2}{a^2-1}$ devine:

$$\frac{a+1}{a-1} \quad \frac{a+1}{a-1} \quad \frac{a-2}{a+1} \quad \frac{a-1}{a+1} \quad \frac{a}{a+1}$$

8. După simplificare, fracția $\frac{a^3-3a-2}{a^2+5a+4}$ devine:

$$\frac{a+2}{a+4} \quad \frac{a^2-a-2}{a+4} \quad \frac{a^2-a-1}{a+1} \quad \frac{a-2}{a+1} \quad \frac{a-1}{a+1}$$

9. După simplificare, fracția $\frac{a^2-9}{a^2-2a-3}$ devine:

$$\frac{a+1}{a-3} \quad \frac{a+1}{a+2} \quad \frac{a-3}{a+3} \quad \frac{a+3}{a+1} \quad \frac{a}{a+3}$$

10. După simplificare, fracția $\frac{a^2+ab}{b^2+ab}$ devine:

$$\frac{a}{b-1} \quad \frac{a+b}{a} \quad \frac{a+1}{b} \quad \frac{a}{b+1} \quad \frac{a}{b}$$

11. După simplificare, fracția $\frac{a^3-ab^2}{b^3-a^2b}$ devine:

$$\frac{a}{a+b} \quad -\frac{a}{b} \quad \frac{ab}{a+b} \quad \frac{a}{b+1} \quad \frac{a}{b}$$

12. După simplificare, fracția $\frac{12a^2-6ab}{12a^2-3b^2}$ devine:

$$\frac{2a}{2a+b} \quad \frac{a}{2a+b} \quad \frac{a+1}{2a-b} \quad \frac{a}{a+b} \quad \frac{a}{a-b}$$

13. După simplificare, fracția $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2+2ab}$ devine:

$$\frac{a+b}{a} \quad \frac{a+2b}{a} \quad \frac{a+b}{b} \quad \frac{a+2b}{b} \quad \frac{a-b}{a}$$

14. După simplificare, fracția $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ devine:

$$\frac{a+b}{a-b} \quad \frac{a+2b}{a+b} \quad \frac{a-b}{ab} \quad \frac{a+2b}{a-b} \quad \frac{a-b}{a+b}$$

15. După simplificare, fracția $\frac{ab+1-a-b}{ab-1-a+b}$ devine:

$$\frac{a+b}{a+1} \quad \frac{a+1}{a+b} \quad \frac{a-1}{a+1} \quad \frac{a+1}{b+1} \quad \frac{a-b}{a+b}$$

16. După simplificare, fracția $\frac{a^2b+a^2+b+1}{b^2+3b+2}$ devine:

$$\frac{a+1}{b+2} \quad \frac{a^2+1}{b+2} \quad \frac{a^2+2}{b+1} \quad \frac{a+2}{b+2} \quad \frac{a+1}{b-2}$$

17. După simplificare, fracția $\frac{a^2+3ab+2b^2}{a^2-4b^2}$ devine:

$$\frac{a+2b}{a-b} \quad \frac{a+b}{a-b} \quad \frac{a+b}{a-2b} \quad \frac{a+b}{a+2b} \quad \frac{a-b}{a+2b}$$

18. După simplificare, fracția $\frac{a-ab-b+b^2}{a^2-ab+ac-bc}$ devine:

$$\frac{a-b}{a+c} \quad \frac{1-b}{a+c} \quad \frac{a+b}{a+c} \quad \frac{1+b}{a-c} \quad \frac{a-b}{a+c}$$

19. După simplificare, fracția $\frac{a^2-b^2}{ac-bc-ab+b^2}$ devine:

$$\frac{a-b}{b+c} \quad \frac{a+b}{b-c} \quad \frac{a+b}{c-b} \quad \frac{a+b}{a-c} \quad \frac{a-b}{a+c}$$

20. După simplificare, fracția $\frac{ac^2+bc^2+a+b}{ac+bc+a+b}$ devine:

$$\frac{a-b}{b+c} \quad \frac{a+b}{b-c} \quad \frac{b+c}{c+1} \quad \frac{c^2+1}{c+1} \quad \frac{a-b}{c+1}$$

21. Forma cea mai simplă a expresiei: $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$ este:

$$\frac{a+1}{a^2+1} \quad \frac{2a}{a^2-1} \quad \frac{a-1}{a^2+1} \quad \frac{2}{a^2+1} \quad \frac{2a}{a^2+1}$$

22. Forma cea mai simplă a expresiei: $\frac{a+1}{a} - \frac{a}{a+1}$ este:

$$\frac{a+1}{a^2+1} \quad \frac{2a+1}{a^2+a} \quad \frac{2a-1}{a^2+1} \quad \frac{a+2}{a^2+a} \quad \frac{2a}{a^2+a}$$

23. Forma cea mai simplă a expresiei: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} \right) + \frac{2a}{a^2-1}$

este:

$$\frac{a+1}{a-1} \quad \frac{a-1}{a+1} \quad \frac{a}{a^2-1} \quad \frac{a+2}{a^2-1} \quad \frac{2a}{a^2-1}$$

24. Forma cea mai simplă a expresiei: $\frac{ab}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ este:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \quad \frac{2ab}{a^2-b^2} \quad \frac{5ab}{a^2-b^2} \quad \frac{a+b}{a^2+b} \quad \frac{2a}{a^2+b}$$

25. Forma cea mai simplă a expresiei: $\frac{5}{2a+3} - \frac{2}{3-2a} + \frac{2a+9}{4a^2-9}$

este:

$$\frac{a}{4a^2-9} \quad \frac{2a}{a^2-3} \quad \frac{5a}{2a-3} \quad \frac{a}{2a+3} \quad \frac{4}{2a+3}$$

26. Forma cea mai simplă a expresiei: $\frac{1}{a-b} + \frac{a-2b}{a(a-b)} - \frac{a-b}{a^2}$

este: $\frac{a+2b}{a^2} \quad \frac{a-b}{a^2} \quad \frac{a-b}{a^2} \quad \frac{a+b}{a^2} \quad \frac{a+b}{a-b}$

27. Forma cea mai simplă a expresiei: $\frac{1}{a^2-a} + \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2-1}$

este: $\frac{a}{a+1} \quad \frac{a}{a-1} \quad \frac{a-1}{a-3} \quad \frac{a}{a-2} \quad \frac{3}{a^2-1}$

28. Forma cea mai simplă a expresiei: $\frac{1}{a+b} + \frac{a+2b}{a(a+b)} - \frac{a-b}{a^2}$

este: $\frac{a+2b}{a^2} \quad \frac{a-b}{a^2} \quad \frac{a-b}{a^2} \quad \frac{a+b}{a^2} \quad \frac{a+b}{a-b}$

29. Forma cea mai simplă a expresiei:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{a-1}{a^2+4a+4} : \frac{a+3}{a-3} \cdot \left(\frac{a+2}{a-1}\right)^2$$

este: $\frac{a}{a+3} \quad \frac{2a}{(a-1)(a+3)} \quad \frac{a-1}{(a-3)(a+1)} \quad \frac{a}{a-3} \quad \frac{2a}{a-1}$

30. Forma cea mai simplă a expresiei:

$$1 - \frac{a+2}{a^2+2a+1} : \frac{a-1}{a+1} : \frac{a+2}{a-1}$$

este: $\frac{a}{a+1} \quad \frac{a}{a+2} \quad \frac{a-1}{a+1} \quad \frac{a}{a-3} \quad \frac{a}{a-1}$

31. Forma cea mai simplă a expresiei:

$$\left[\frac{a^2}{a^2-1} - \frac{a^2}{a^2+1} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a^2+a} \right) \right] : \frac{a^2-a+1}{a-1}$$

este: $\frac{1}{a+1} \quad \frac{a}{a+1} \quad \frac{a-1}{a+1} \quad \frac{a}{a-3} \quad \frac{a}{a-1}$

32. Forma cea mai simplă a expresiei:

$$\left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a-1} + \frac{2a}{a^2-1} \right) : \frac{a+1}{a-1}$$

este: $\frac{a}{a+1} \quad \frac{a}{a+2} \quad 1 \quad \frac{a}{a-3} \quad \frac{a}{a-1}$

C U P R I N S

	Enunț.	Rezolv.
1. Intervale de numere reale. Inecuații în R.	5	161
1.1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	5	161
1.2 Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor ..	8	161
1.3 Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\geq 0, < 0, \leq 0$), $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$	12	162
1.4 Teste grilă de autoevaluare	15	164
Testul 1	15	164
2. Calcul algebric în R	16	165
2.1 Operații cu numere reale reprezentate prin litere (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere), reducerea termenilor asemenea	16	165
2.1.1 Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	16	165
2.1.2 Înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere	18	165
2.1.3 Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	20	166
2.1.4 Reguli de calcul cu numere reale reprezentate prin litere	22	167
2.2 Formule de calcul prescurtat	24	167
2.3 Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în R (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul prescurtat)	26	168
2.4 Frații algebrice, operații cu acestea (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere)	30	169
2.5 Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$	38	172
2.6 Teste grilă de autoevaluare	42	174
Testul 1	42	174
Testul 2	43	175
3. Funcții	44	176
3.1 Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule. Graficul unei		

funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice.	44	176
3.2 Funcții de forma $f: D \rightarrow R, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și D este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat. Interpretare geometrică. Lecturi grafice.	48	177
3.3 Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date)	52	177
3.4 Teste grilă de autoevaluare	55	178
Testul 1	55	178
Testul 2	56	179
4. Elemente ale geometriei în spațiu	57	179
4.1 Puncte, drepte, plane. Convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane	57	179
4.2 Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; prisma dreaptă, paralelipiped dreptunghic, cub; cilindru circular drept; con circular drept. Reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări.	63	180
4.3 Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu un plan, plane paralele. Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate. Trunchiul de piramidă, trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)	70	181
4.4 Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan. Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept, distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă / con circular drept. Plane perpendiculare. Aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate.	77	182
4.5 Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Aplicație: lungimea proiecției unui segment. Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul a două plane. Plane perpendiculare.	85	186
4.6 Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la un plan. Calculul distanței		

dintre două plane paralele.	98	191
4.7 Teste grilă de autoevaluare	104	195
Testul 1	104	195
Testul 2	105	196
Testul 3	106	197
Testul 4	107	198
5. Arii și volume ale unor corpuri geometrice	108	199
5.1 Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate	108	199
5.2 Arii și volume ale unor corpuri geometrice	110	201
5.2.1 Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul	110	201
5.2.2 Piramida regulată	121	206
5.2.3 Trunchiul de piramidă regulată	129	214
5.2.4 Corpuri rotunde	133	217
5.2.4.1 Cilindrul circular drept	133	217
5.2.4.2 Conul circular drept	137	219
5.2.4.3 Trunchiul de con circular drept	142	222
5.2.4.4 Sfera	146	225
5.3 Teste grilă de autoevaluare	150	227
Testul 1	150	227
Testul 2	151	228
Testul 3	152	229
Testul 4	153	231
6. Teste grilă de autoevaluare finale	154	232
Testul 1	154	232
Testul 2	155	233
Testul 3	156	234
Testul 4	157	235
Testul 5	158	235
Testul 6	159	236
Testul 7	160	236

