6. FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA

1. Să se reprezinte grafic funcţia:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2x^2-5x+2$;

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=-x^2+3x-2$;

c) $f:[-2,2]\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2+x+1$;

d) $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2+3x-1$;

e) $f:(-\infty,3)\to\mathbf{R},\ f(x)=3x^2-2x+1$.

2. Să se reprezinte grafic funcţia:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & ,x<1 \\ x^2-x+1 & ,x\geq 1 \end{cases}$;

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & ,x<0 \\ x^2-5x+4 & ,x\geq 0 \end{cases}$;

c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & ,x<2 \\ x^2-x+5 & ,x\geq 2 \end{cases}$

d) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & ,x<-1 \\ x+4 & ,x\geq -1 \end{cases}$;

e) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} x-1 & ,x<3 \\ x^2-x+1 & ,x\geq 3 \end{cases}$.

3. Să se reprezinte grafic funcţia:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$;

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\left|x^2+x+1\right|$;

c) $f:[-5,5]\to\mathbf{R},\ f(x)=\left|x^2-7x+10\right|$

4. Să se determine funcţia de gradul al doilea

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$$

al cărei grafic trece prin punctele :

a) $A(1,-2), B(3,0), C(-1,12)$; b) $A(1,0), B(2,8), C(-3,68)$;

c) $A(1,2), B(-1,12), C(3,0)$; d) $A(1,2), B(-1,6), C(2,3)$.

5. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$ să aibă vârful în punctul :

a) $V(1,-1)$; b) $V(3,5)$; c) $V(-1,7)$;

d) $V(4,0)$; e) $V(0,-9)$; f) $V(7,9)$.

6. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde :

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x\in[2,+\infty) \\ 2x-7, & x\in(-\infty,2) \end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x\in(-\infty,1] \\ -3x-5, & x\in(1,+\infty) \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\in(-\infty,-1] \\ -x^2+6x-9, & x\in(-1,+\infty) \end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+1, & x\in(-\infty,2] \\ x^2-2x-3, & x\in(2,+\infty) \end{cases}$.

7. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1, & x\in(-\infty,0) \\ a, & x\in[0,3) \\ -x^2+4x-3, & x\in[3,+\infty) \end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x-4, & x\in(-\infty,-1] \\ a, & x\in(-1,1) \\ x+1, & x\in[1,+\infty) \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} -x-5, & x\in(-\infty,-2] \\ a, & x\in(-2,2) \\ -x^2+6x-12, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

să fie monotonă.

8. Să se determine valorile lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care valorile funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=ax^2+6(a+1)x+9a+31,\ a\neq 0$;

b) $f(x)=(a-1)x^2+ax+a+1,\ a\neq 1$;

c) $f(x)=(a-2)x^2+2(2a-3)x+a-2,\ a\neq 2$

să fie pozitive oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

9. Să se determine valorile lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care valorile funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=(a-2)x^2+2(2a-3)x+5a-6,\ a\neq 2$;

b) $f(x)=ax^2+2(2a+1)x+2a+1,\ a\neq 0$;

c) $f(x)=(a-2)x^2-2ax+3a-a^2,\ a\neq 2$

să fie negative oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

10. Să se determine valorile lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=ax^2-(2a+7)x+a-1,\ a\neq 0$;

b) $f(x)=x^2-2(a-1)x+a(a-3)$;

c) $f(x)=(a-1)x^2-2ax+a+1,\ a\neq 1$

să fie tangent axei *Ox*.

11. Să se determine valorile lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=ax^2+2(a-1)x+a-1,\ a\neq 0$;

b) $f(x)=x^2+(2a+1)x-a$;

c) $f(x)=(a+1)x^2-2(a+2)x+5,\ a\neq -1$
să taie axa Ox în două puncte distincte.

12. Să se arate că pentru orice valoare $a\in\mathbf{R}$ graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=x^2-2(a-1)x-a$;

b) $f(x)=(a+1)x^2-2(a+2)x+3,\ a\neq -1$;

c) $f(x)=ax^2-2(a-3)x+a-6,\ a\neq 0$;

d) $f(x)=x^2-(a+2)x+a+1$

taie axa Ox în cel puţin un punct.

13. Să se determine valorile $a\in\mathbf{R}$ astfel încât vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=(a-1)x^2-2ax+a+1,\ a\neq 1$;

b) $f(x)=(a+1)x^2-2(a+2)x+3,\ a\neq -1$;

c) $f(x)=(a-1)x^2+2(a+2)x+a+1,\ a\neq 1$;

să fie situat sub axa Ox.

14. Să se determine valorile $a\in\mathbf{R}$ astfel încât vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=(a-5)x^2-4ax+a-2,\ a\neq 5$;

b) $f(x)=(a+2)x^2-2(a+1)x+a+1,\ a\neq -2$;

c) $f(x)=(a-1)x^2+(a+1)x+a+1,\ a\neq 1$;

să fie situat deasupra axei Ox.

15. Să se arate că vârfurile parabolei asociate funcţiei:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2-2(a-1)x+a^2-3a$;

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2-(2a-2)x+a^2$;

c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2+2(a+2)x+a^2-1$

se găsesc pe o dreaptă.

16. Să se arate că vârfurile parabolelor asociate funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=x^2-2(a-1)x+a+1$;

b) $f(x)=x^2-(a+1)x+a-3$;

c) $f(x)=x^2-(6a+3)x+2a+5$

se găsesc pe o parabolă.

17. Să se determine curba pe care se găsesc vârfurile parabolelor asociate funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f(x)=ax^2-(2a+7)x+a-1, a\neq 0$;

b) $f(x)=x^2-2(a+7)x+a^2+1$;

c) $f(x)=x^2-(3a+2)x+2a-5$.

18. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_a(x)=ax^2-(2a+1)x+a+1.$$

Să se determine $a\in\mathbf{R}-\{0\}$ astfel încât vârful parabolei asociate să se găsească pe:

a) prima bisectoare;

b) a doua bisectoare;

c) dreapta $2x+3y+5=0$.

19. Să se arate că oricare ar fi $a\in\mathbf{R}$, parabolele asociate funcţiilor $f_a:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a) $f_a(x)=x^2+(a-4)x+2-a$;

b) $f_a(x)=x^2+(a-5)x+9-2a$;

c) $f_a(x)=ax^2+(2-3a)x+2a-4, a\neq 0$;

d) $f_a(x)=(a+1)x^2-(3a+5)x+2a+6, a\neq -1$;

e) $f_a(x)=x^2-(a+2)x+a-1$

trec prin cel puţin un punct fix.

20. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât parabolele asociate funcţiilor $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f_a(x) = (a+1)x^2 + 4(a+1)x + 10a + 30$,

$g_a(x) = x^2 - 2(a+1)x + a - 1$;

b) $f_a(x) = ax^2 - (a+2)x - 1$, $g_a(x) = x^2 - x - a$;

c) $f_a(x) = ax^2 + x - a$, $g_a(x) = (a+3)x^2 - (a+1)x + 2 - a$

să se intersecteze în două puncte distincte.

21. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât parabolele asociate funcţiilor $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f_a(x) = 2x^2 - 2(a+2)x + 1$, $g_a(x) = x^2 + 10x + a^2$;

b) $f_a(x) = ax^2 - (a+2)x - 1$, $g_a(x) = x^2 - x - a$;

c) $f_a(x) = ax^2 + x - a$, $g_a(x) = (a+3)x^2 - (a+1)x + 2 - a$

să fie tangente.

22. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât graficele funcţiilor $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f_a(x) = 3x^2 - (a+2)x + 2$, $g_a(x) = 2x^2 - (a+1)x + 4$;

b) $f_a(x) = x^2 - (a+3)x + 6$, $g_a(x) = x^2 - (2a+3)x + 10$;

c) $f_a(x) = 2x^2 - (a+2)x + 4$, $g_a(x) = 2x^2 - (a+10)x + 8$

să se intersecteze pe axa *Ox*.

23. Să se determine valorile lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care valorile funcţiei $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f_a(x) = x^2 - 2ax + a + 1$;

b) $f_a(x) = ax^2 + x - a$;

c) $f_a(x) = (a+1)x^2 - 3ax + 4 - a$

să fie pozitive oricare ar fi $x > 0$.

24. Să se determine valorile lui $a \in \mathbf{R}$ pentru care valorile funcţiei $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f_a(x)=(a+1)x^2-(a+7)x+a$;

b) $f_a(x)=x^2-2(a-2)x-2a$;

c) $f_a(x)=(5a+1)x^2+(7a+3)x+3a$

să fie negative oricare ar fi $x>0$.

25. Fie familiile de funcţii de gradul al doilea:

$$f_a(x)=ax^2+6(a+1)x+9(a+5),$$

$$g_a(x)=ax^2+6(a+1)x+9(a+4).$$

Să se arate că dacă o parabolă din prima familie taie axa *Ox*, atunci şi parabola corespunzătoare din a doua familie taie axa *Ox*, iar dacă o parabolă din a doua familie nu taie axa *Ox*, atunci şi parabola corespunzătoare din prima familie nu taie axa *Ox*.

26. Să se calculeze Im *f* pentru:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2-3x+2$;

b) $f:\mathbf{R}-\{-1\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{-x^2-2x-3}{x^2+2x+1}$;

c) $f:\mathbf{R}-\{1\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{-6x+6}{x^2-2x+1}$;

d) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{-x^2-4x-30}{x^2+4x+10}$;

e) $f:\mathbf{R}-\{1,2\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$;

f) $f:\mathbf{R}-\left\{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{-3x^2+x-2}{x^2-x-1}$.

27. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât valorile funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+1}$ să fie în intervalul $(0,3)$.

28. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2-4x+1$. Să se calculeze: $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$; $\max\limits_{x\in[0,2]} f(x)$; $\min\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)$.

29. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2-4x+1$. Să se calculeze:

a) $f([0,1])$; b) $f([1,5])$; c) $f([-1,1])$; d) $f((1,+\infty))$.

30. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2-2x+6$. Să se calculeze:

a) $f([2,5])$; b) $f([0,4])$; c) $f([-2,2])$; d) $f((3,+\infty))$.

31. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât:

a) $x^2+y^2+x+y+a>0 \quad (\forall)\ x,y\in\mathbf{R}$;

b) $x^2+y^2-x-y+3a>0 \quad (\forall)\ x,y\in\mathbf{R}$;

c) $x^2+y^2-2x-y+a>0 \quad (\forall)\ x,y\in\mathbf{R}$;

d) $x^2+y^2-4x-4y+a>0 \quad (\forall)\ x,y\in\mathbf{R}$.

32. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât:

$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+a>0 \quad (\forall)\ x,y,z\in\mathbf{R}$.

33. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei:

a) $x^2+(2-a)x-a-3=0$; b) $x^2+(a+1)x+a-1=0$;

c) $x^2+ax-2a+1=0$; d) $x^2+(1-a)x+a-3=0$

să fie minimă.

34. Să se rezolve ecuaţiile următoare:

a) $x^2-2ax+a^2-1=0$;

b) $x^2-(3a+2)x+2a^2+3a+1=0$;

c) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$;

d) $x^2-2(a+b)x+a^2+2ab-3b^2=0$;

e) $x^2-(2a+3b)x+a^2+3ab+2b^2=0$;

f) $x^2-4ax+3a^2-2ab-b^2=0$;

g) $x^2-2(a+3b)x+a^2+6ab+5b^2=0$, unde $a,b\in\mathbf{R}$.

35. Să se rezolve inecuaţiile următoare:

a) $x^2-4x\geq 0$; b) $x^2-3x+2<0$; c) $2x^2-5x+2>0$;
d) $3x^2-10x+3\leq 0$; e) $x^2-11x+10\geq 0$; f) $-x^2+x+12<0$;
g) $-x^2-x+6<0$; h) $x^2-x+1>0$.

36. Să se rezolve inecuaţiile următoare:

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}<0$; b) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x+4}\leq 0$; c) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}\leq 0$;

d) $\dfrac{x^2+x+4}{3x^2-10x+3}\geq 0$; e) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}<1$; f) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}\geq -1$;

g) $-1\leq \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}\leq 1$; h) $-2\leq \dfrac{x^2-x+1}{x^2-11x+10}\leq 1$.

37. Se dă ecuaţia $x^2-2x-1=0$. Să se calculeze valorile expresiilor următoare:

a) $x_1^2+x_2^2$; b) $x_1^3+x_2^3$; c) $x_1^4+x_2^4$; d) $x_1^5+x_2^5$;
e) $x_1^6+x_2^6$; f) $x_1^8+x_2^8$; g) $x_1^9+x_2^9$; h) $x_1^{10}+x_2^{10}$.

38. Se dă ecuaţia $x^2-5x+2=0$. Să se calculeze valorile expresiilor următoare:

a) x_1-x_2; b) $x_1^2-x_2^2$; c) $x_1^3-x_2^3$; d) $x_1^4-x_2^4$;

e) $x_1^5-x_2^5$; f) $x_1^6-x_2^6$; g) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; h) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$;

i) $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}$; j) $\dfrac{1}{x_1^4}+\dfrac{1}{x_2^4}$; k) $\dfrac{1}{x_1^5}+\dfrac{1}{x_2^5}$; l) $\dfrac{1}{x_1^6}+\dfrac{1}{x_2^6}$;

m) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$; n) $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}$; o) $\dfrac{x_1+1}{x_2+1}+\dfrac{x_2+1}{x_1+1}$;

p) $\dfrac{x_1-2}{x_2+2}+\dfrac{x_2-2}{x_1+2}$; q) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$; r) $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$.

39. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât între rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei $x^2-3x+a=0$ să existe relaţia:

a) $x_1^2+x_2^2=3$; b) $x_1^3+x_2^3=9$; c) $x_1^4+x_2^4=47$;

d) $x_1^5+x_2^5=-18$; e) $x_1-x_2=11$; f) $x_1^2-x_2^2=12$;

g) $x_1^3+x_2^3=9-a$; h) $x_1^4-x_2^4=9-2a$; i) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2$;

j) $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{9}{a}, a\neq 0$; k) $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=2$;

l) $\frac{x_1+1}{x_2+1}+\frac{x_2+1}{x_1+1}=1$; m) $\frac{x_1-2x_2}{2x_1-x_2}+\frac{2x_1-x_2}{x_1-2x_2}=2$;

n) $\frac{x_1+2x_2}{2x_1+x_2}+\frac{2x_1+x_2}{x_1+2x_2}=4$; o) $\frac{2x_1+3x_2}{3x_1+2x_2}+\frac{3x_1+2x_2}{2x_1+3x_2}=2$.

40. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât între rădăcinile x_1,x_2 ale ecuaţiei $x^2+x+a=0$ să existe relaţia:

a) $x_1=2x_2$; b) $3x_1-4x_2=18$;

c) $3x_1+7x_2=1$; d) $x_1^2=x_2$;

e) $x_1+x_2=x_1^3+x_2^3$; f) $x_1^2+x_2^2=x_1^3+x_2^3$;

g) $x_1^3+x_2^3=x_1^4+x_2^4$; h) $x_1+x_2=x_1^4+x_2^4$.

41. Ce relaţie trebuie să existe între a şi b astfel încât rădăcinile x_1,x_2 ale ecuaţiei $x^2+ax+b=0$ să satisfacă relaţia:

a) $2x_1+3x_2=a$; b) $x_1+4x_2=ab$; c) $5x_1+3x_2=2$;

d) $3x_1-4x_2=5$; e) $x_1^3+x_2^3=a^3$; f) $x_1^4+x_2^4=b^4$;

g) $x_1^2=ax_2$; h) $x_1^3=(b-a)x_2$; i) $x_1^5+x_2^5=x_1^3+x_2^3$.

42. Fie ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, cu rădăcinile x_1,x_2, astfel încât $x_2=a\cdot x_1$. Atunci are loc relaţia $b^2=(1+a)^2\cdot c$.

43. Fie ecuaţiile: $ax^2+bx+c=0$ cu rădăcinile x_1,x_2 şi $a'x^2+b'x+c'=0$, cu rădăcinile x_1',x_2'.

Să se găsească relaţia între coeficienţii ecuaţiilor ştiind că:

a) $\frac{x_1 - x_1'}{x_1 - x_2'} + \frac{x_2 - x_1'}{x_2 - x_2'} = 0$; b) $\frac{x_1 + x_1'}{x_1 + x_2'} + \frac{x_2 + x_1'}{x_2 + x_2'} = 0$.

44. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + ax + 1 = 0$ şi x_1', x_2' rădăcinile ecuaţiei $x^2 + bx + 1 = 0$.

Să se calculeze valorile expresiilor:

a) $\left(x_1 - x_1'\right)\left(x_2 - x_1'\right)\left(x_1 - x_2'\right)\left(x_2 - x_2'\right)$;

b) $\left(x_1 + x_1'\right)\left(x_2 + x_1'\right)\left(x_1 + x_2'\right)\left(x_2 + x_2'\right)$;

c) $\left(x_1 - x_1'\right)\left(x_2 - x_1'\right)\left(x_1 + x_2'\right)\left(x_2 + x_2'\right)$;

d) $\left(x_1 + x_1'\right)\left(x_2 + x_1'\right)\left(x_1 - x_2'\right)\left(x_2 - x_2'\right)$.

45. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 4x + 1 = 0$, să se calculeze valorile expresiilor:

a) $\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2}$; b) $\frac{x_1 + 1}{x_2 - 2} + \frac{x_2 + 1}{x_1 - 2}$;

c) $\frac{1}{x_1^2 + x_1 + 1} + \frac{1}{x_2^2 + x_2 + 1}$; d) $\frac{x_1^2 + 3x_1 + 4}{x_1^2 - 3x_1 + 2} + \frac{x_2^2 + 3x_2 + 4}{x_2^2 - 3x_2 + 2}$;

e) $\frac{x_1^3 + x_1 - 1}{x_1^3 + x_1 + 1} + \frac{x_2^3 + x_2 - 1}{x_2^3 + x_2 + 1}$; f) $\frac{x_1^4 + x_1^2 + 5}{x_1^4 + x_1 + 1} + \frac{x_2^4 + x_2^2 + 5}{x_2^4 + x_2 + 1}$;

g) $\frac{x_1^5 - x_1^3 + x_1 + 4}{x_1^5 + x_1^4 + x_1^2 + 1} + \frac{x_2^5 - x_2^3 + x_2 + 4}{x_2^5 + x_2^4 + x_2^2 + 1}$;

h) $\frac{x_1^6 + x_1^5 + 2x_1^3 + 3x_1 + 1}{x_1^6 + x_1^4 + x_1^2 + 1} + \frac{x_2^6 + x_2^5 + 2x_2^3 + 3x_2 + 1}{x_2^6 + x_2^4 + x_2^2 + 1}$.

46. Se consideră ecuaţiile următoare:

a) $x^2 + \left(m^3 + m + 1\right)x + m = 0$;

b) $x^2 + \left(m + 1\right)x + m + 5 = 0$;

c) $x^2 + \left(2m + 5\right)x + m^2 + 2 = 0$;

d) $mx^2 + \left(m + 2\right)x + m + 1 = 0$;

e) $(m-1)x^2+(2m+1)x+m=0$;

f) $(m+1)x^2+(m-1)x+m+2=0$;

g) $x^2+(m^2+m+1)x+m=0$,

cu rădăcinile x_1 şi x_2. Să se determine pentru fiecare ecuaţie în parte o relaţie între rădăcini independentă de *m*.

47. Să se determine rădăcinile reale ale ecuaţiilor:

a) $x^2-\Delta x+5=0$; b) $x^2+x+\Delta=0$;

c) $x^2-(\Delta-4)x+\Delta-5=0$; d) $x^2-(P+1)x+S-1=0$;

e) $x^2+(P+5S)x+S-7=0$; f) $x^2-\Delta x+S=0$;

g) $x^2-Px+\Delta=0$; h) $Px^2-(\Delta+2)x+S-1=0$;

i) $(\Delta+1)x^2-Px+S=0$; j) $\Delta x^2-Px+S=0$,

unde Δ, S, P sunt discriminantul, suma, respectiv produsul rădăcinilor.

48. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât următoarele perechi de ecuaţii să aibă o rădăcină comună:

a) $x^2-(m+3)x+6=0,\quad x^2-(2m+3)x+10=0$;

b) $x^2-(m+3)x+m+5=0,\quad x^2-(m+5)x+2m+6=0$;

c) $x^2-(m+2)x+m+3=0,\quad x^2-(m+3)x+3m-1=0$;

d) $x^2-mx+m-1=0,\quad x^2-(m-2)x-4=0$;

e) $x^2-(m+2)x+m+1=0,\quad x^2-(m+4)x+m+3=0$;

f) $x^2-(2m-5)x+m-1=0,\quad x^2-(2m-7)x-4=0$;

g) $mx^2-(m+2)x+2=0,\quad mx^2-(m+3)x++m+2=0$.

49. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât următoarele ecuaţii să aibă o rădăcină comună:

a) $\begin{cases} x^2-(m+2)x+m+1=0 \\ x^2-2(m+1)x+4m-1=0 \\ x^2-(m+4)x+m+3=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2-(m+3)x+6=0 \\ x^2-(2m+3)x+10=0 \\ x^2-(3m+3)x+m+12=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2-(m+3)x+m+5=0 \\ x^2-(3m-1)x+2m+6=0 \\ x^2-(2m+4)x+3m+7=0 \end{cases}$.

50. Să se arate că următoarele perechi de ecuaţii au cel puţin o rădăcină comună:

a) $\begin{cases} x^2-(a+b)x-ac-bc-c^2=0 \\ x^2-(a+c)x-ab-b^2-bc=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2-(a+b+c+1)x+a+b+c=0 \\ x^2-(a+b+c-1)x-a-b-c=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2-(a+b+c)x+ab+ac=0 \\ x^2-(2a+c)x+a^2+ac=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^2-(a+b)x-c(a+b+c)=0 \\ x^2-(a+c)x-b(a+b+c)=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} ax^2-(1+ab)x+b=0 \\ x^2-(1+ab^2)x+b^2=0 \end{cases}$.

51. Să se arate că următoarele ecuaţii au cel puţin o rădăcină comună:

a) $\begin{cases} x^2-(a+1)x+a=0 \\ x^2-(b+1)x+b=0 \\ x^2-(c+1)x+c=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2-(a+b)x+ab=0 \\ x^2-(a+c)x+ac=0 \\ x^2-(a+1)x+a=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2-(ab+1)x+ab=0 \\ x^2-(bc+1)x+bc=0 \\ x^2-(ac+1)x+ac=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2-(a+b+1)x+a+b=0 \\ x^2-(b+c+1)x+b+c=0 \\ x^2-(a+c+1)x+a+c=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x^2-(a+b-c+1)x+a+b-c=0 \\ x^2-(a-b+c+1)x+a-b+c=0 \\ x^2-(-a+b+c+1)x-a+b+c=0 \end{cases}$.

52. Să se determine a şi b reali astfel încât următoarele perechi de ecuaţii să aibă aceleaşi rădăcini:

a) $x^2+ax+2=0$, $\quad x^2+bx+a+7=0$;

b) $ax^2-5x+b-5=0$, $\quad (b-3)x^2-10x+3a-2=0$;

c) $17x^2+(3a-1)x-2=0$, $\quad (b+2)x^2-(2b+1)x-1=0$;

d) $(a-1)x^2-(b-1)x+5=0$, $\quad (b-3)x^2-2ax+10=0$;

e) $(2a-1)x^2-(4b+1)x+8=0$, $\quad bx^2-18ax+16=0$.

53. Să se arate că următoarele ecuaţii au rădăcinile reale:

a) $x^2-(a+b)x-c(a+b+c)=0$;

b) $x^2-(a-c)x+ab-b^2-ac+bc=0$;

c) $x^2-cx-(a+b)(a+b+c)=0$;

d) $x^2-(a+b+c)x+ab+ac=0$;

e) $x^2-(a+2b+c)x+ab+b^2+ac+bc=0$;

f) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+ac-bc=0$;

g) $x^2-2(a+b)x+(a+b)^2-c^2=0$.

.

Cuprins