

2.2 Progresii aritmetice

a) Scurtă teorie

1. Definiție. Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real r , numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând r ($a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k, k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația r .

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = n$ este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall)k, k \geq 2$.

b) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = n^2$ nu este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$, care nu este constant.

2. Formula termenului general al progresiei aritmetice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Exemplu. a) Pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}, a_1 = 2, r = 3$, avem: $a_n = a_1 + (n - 1)r = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$.

3. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teoremă. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ suma primilor n termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

Exemple. a) Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = 3n - 1$, avem $a_1 = 2, a_{10} = 29$, iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2 + 29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul $1, 3, 5, 7, \dots$. Acesta este progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 2$. Atunci termenul 1000 este

$a_{1000} = 1 + 999 \cdot 2 = 1999$. Suma primilor 1000 de termeni ai șirului este egală cu:

$$S_{1000} = \frac{(1 + 1999) \cdot 1000}{2} = 1\,000\,000.$$

4. Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice

1. Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, are loc relația:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (\forall)k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (\forall)k, k \geq 2,$$

atunci acest șir este o progresie aritmetică.

3. Fiind date numerele a_1, a_2, \dots, a_n în progresie aritmetică, are loc relația:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \quad (\forall)k, k \geq 2.$$

b) Probleme alese rezolvate

1. Demonstrează că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluție. Presupunem prin absurd că $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice. Atunci:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{5} \Rightarrow 12 = 2 + 5 + 2\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{5}{2} \Rightarrow 10 = \frac{25}{4}, \text{ fals.}$$

2. Determină progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ știind că $a_4 = 7$ și $a_8 = 15$.

Soluție. $a_4 = a_1 + 3r = 7$ și $a_8 = a_1 + 7r = 15$. Rezolvând sistemul obținem $a_1 = 1$ și $r = 2$.

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă avem egalitățile $a_m = n$ și $a_n = m, m \neq n$ calculați $a_p, p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Avem: $a_m = a_1 + (m - 1)r = n$ și

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = m.$$

Rezolvând sistemul format obținem $r = -1$ și $a_1 = m + n - 1$.
Atunci $a_p = a_1 + (p - 1)r = m + n - 1 - p + 1 = m + n - p$.

4. Se consideră șirul: 1, 5, 9, Determinați rangul termenului 401.

Soluție. Se observă că șirul este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 4$. Notăm cu k rangul termenului 401 și avem: $401 = 1 + (k - 1) \cdot 4 \Rightarrow k = 101$.

5. Determinați progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ știind că $a_1 + a_3 = 8$ și $S_4 = 22$.

Soluție. $a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2r = 8 \Rightarrow a_1 + r = 4$.

$$S_4 = 22 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_4)4}{2} = 22 \Rightarrow 2a_1 + 3r = 11.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuații obținem: $a_1 = 1$ și $r = 3$.

6. Rezolvați ecuația:

$$1 + 3 + 5 + \dots + x = 100.$$

Soluție. Notăm cu n numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este $r = 2$, primul termen $a_1 = 1$ și suma $S = 100$.
Atunci: $S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2} = 100 \Rightarrow n^2 = 100 \Rightarrow n = 10$.

7. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică și S_k suma primilor k termeni ai săi. Să se demonstreze că dacă $S_m = m$ și $S_n = n$, $m \neq n$, atunci $S_p = p$ (\forall) $p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. $S_m = m \Rightarrow \frac{[a_1 + a_m]m}{2} = m \Rightarrow 2a_1 + (m - 1)r = 2$.

$$S_n = n \Rightarrow \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = n \Rightarrow 2a_1 + (n - 1)r = 2.$$

Scăzând membru cu membru cele două relații obținem:
 $r(m - n) = 0 \Rightarrow r = 0$ ($m \neq n$). Atunci $a_1 = 1$.

$$S_p = \frac{[a_1 + a_p]p}{2} = \frac{(1 + 1)p}{2} = p.$$

8. Dacă numerele $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică sau $a + b + c = 0$.

Soluție. Deoarece numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci are loc relația:

$$b^2 - ac = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} \Rightarrow a^2 - bc + c^2 - ab - 2b^2 + 2ac = 0 \Rightarrow (a + c)^2 - b^2 - b(a + b + c) = 0 \Rightarrow (a + b + c)(a - b + c) - b(a + b + c) = 0 \Rightarrow (a + b + c) \cdot (a - 2b + c) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \text{ sau } b = \frac{a + c}{2}.$$

9. Arătați că dacă $a > 0, b > 0, c > 0$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

Soluție. Fie r rația progresiei. Notăm:

$$A = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{c - b} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{r}.$$

Analog obținem:

$$B = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{2r},$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{r}.$$

Evident $2B = A + C$ și atunci rezultă că numerele A, B, C sunt în progresie aritmetică.

10. Rezolvați ecuația $2 + 5 + 8 + \dots + x = 155$, unde x este număr natural.

Soluție. Notăm cu n numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este $r = 3$, primul termen $a_1 = 2$ și suma $S = 155$.

$$\text{Atunci: } S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2} = 155 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3n^2 + n = 310 = 0, \text{ cu soluția naturală } n = 10.$$

$$\text{Atunci } x = a_1 + (n - 1)r = 2 + 9 \cdot 3 = 29.$$

CUPRINS

	Enunțuri Rezolvări	
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	170
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	170
1.1.1 Numere raționale	5	170
1.1.2 Numere iraționale. Numere reale	10	171
1.1.3 Operații algebrice cu numere reale.		
Puteri cu exponent întreg	13	173
1.1.4 Ordonarea numerelor reale	19	174
1.1.5 Modulul unui număr real	21	175
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	25	176
1.1.7 Operații cu intervale de numere reale	28	177
1.2 Elemente de logică matematică	32	178
1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori.		
Operații logice elementare	32	178
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi	37	179
1.2.3 Tipuri de raționamente logice. Metoda reducerii la absurd. Metoda inducției matematice	42	181
1.3 Teste grilă de autoevaluare	46	182
Testul 1	46	182
Testul 2	47	183
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. Șiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	48	184
2.1 Șiruri	48	184
2.2 Progresii aritmetice	51	184
2.3 Progresii geometrice	56	185
2.4 Teste grilă de autoevaluare	61	187
Testul 1	61	187
3. Funcții, lecturi grafice	62	188
3.1 Reper cartezian, produs cartezian, drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m, m \in \mathbf{R}$	62	188
3.2 Noțiunea de funcție, funcții egale. Imaginea unei funcții	65	188
3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții numerice	67	189

	3.4 Proprietăți ale funcțiilor numerice; mărgi- nire, monotonie	70	190
	3.5 Proprietăți ale funcțiilor numerice; paritate, imparitate, periodicitate	73	192
	3.6 Compunerea funcțiilor	75	193
	3.7 Teste grilă de autoevaluare	79	194
	Testul 1	79	194
4.	Funcția de gradul I	80	195
	4.1 Ecuația de gradul I	80	195
	4.2 Funcția afină. Funcția de gradul I. Grafic. Monotonie.	83	196
	4.3 Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I	86	196
	4.4 Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I	90	198
	4.5 Teste grilă de autoevaluare	94	199
	Testul 1	94	199
	Testul 2	95	199
5.	Funcția de gradul al doilea	96	200
	5.1 Ecuația de gradul al doilea.	96	200
	5.2 Funcția de gradul al doilea. Monotonie. Punct de extrem. Intersecția funcției cu axele de coordonate. Graficul funcției	103	202
	5.3 Semnul funcției de gradul al II-lea. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă	109	204
	5.4 Teste de evaluare	113	205
	Testul 1	113	205
6.	Vectori în plan	114	206
	6.1 Segmente orientate	114	206
	6.2 Vectori. Operații cu vectori	118	207
	6.3 Vectori coliniari. Descompunerea unui vector după doi vectori dați, necoliniari și nenuli	124	208
	6.4 Coliniaritate, concurență, paralelism. Calcul vectorial în geometria plană	128	209
	6.5 Teste de evaluare	132	210
	Testul 1	132	210
7.	Trigonometrie și aplicațiile trigonometriei în geometrie	133	211
	7.1 Unități de măsură pentru unghiuri și arce ..	133	211
	7.2 Rezolvarea triunghiului dreptunghic ...	135	212

7.3 Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice	140	214
7.4 Reducerea la primul cadran	146	215
7.5 Formule de legătură între funcțiile trigonometrice	150	216
7.6 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	153	217
7.7 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu, ale jumătății unui unghi	157	218
7.8 Calculul lungimii unui segment și a măsurii unui unghi. Aplicațiile trigonometriei în geometrie	162	220
7.9 Teste grilă de autoevaluare	168	223
Testul 1	168	223
Testul 2	169	225