## 2.2 Progresii aritmetice

## a) Scurtă teorie

**1. Definiție.** Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real $r$, numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând $r$ ( $a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k,\ k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său $a_1$ și rația $r$.

**Exemple**. a) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n$ este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall)k, k \geq 2$ .

b) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n^2$ nu este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$, care nu este constant.

### 2. Formula termenului general al progresiei aritmetice

**Teoremă.** Termenul general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

**Exemplu**. a) Pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 2$, $r = 3$, avem: $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$.

### 3. Suma primilor $n$ termeni ai unei progresii aritmetice

**Teoremă.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ suma primilor *n* termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

**Exemple**. a) Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 3n - 1$, avem $a_1 = 2, a_{10} = 29$, iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2+29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul $1, 3, 5, 7, \cdots$. Acesta este progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 2$. Atunci termenul 1000 este

$a_{1000} = 1 + 999 \cdot 2 = 1999$. Suma primilor 1000 de termeni ai șirului este egală cu:

$$S_{1000} = \frac{(1 + 1\,999) \cdot 1\,000}{2} = 1\,000\,000.$$

**4. Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice**

**1.** Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, are loc relația:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \ (\forall)k, k \geq 2.$$

**2**. Dacă un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \ (\forall)k, k \geq 2,$$

atunci acest șir este o progresie aritmetică.

**3**. Fiind date numerele $a_1, a_{2,} \cdots, a_n$ în progresie aritmetică, are loc relația:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \ \ (\forall)k, k \geq 2.$$

## b) Probleme alese rezolvate

**1**. Demonstrează că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**Soluție.** Presupunem prin absurd că $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice. Atunci:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{5} \Rightarrow 12 = 2 + 5 + 2\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{5}{2} \Rightarrow 10 = \frac{25}{4}, \text{ fals.}$$

**2. D**etermină progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_4 = 7$ și $a_8 = 15$.

**Soluție**. $a_4 = a_1 + 3r = 7$ și $a_8 = a_1 + 7r = 15$. Rezolvând sistemul obținem $a_1 = 1$ și $r = 2$.

**3**. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă avem egalitățile $a_m = n$ și $a_n = m, m \neq n$ calculați $a_{p,}\ p \in \mathbf{N}^*$**.**

**Soluție.** Avem: $a_m = a_1 + (m-1)r = n$ și

$$a_n = a_1 + (n-1)r = m.$$

Rezolvând sistemul format obținem $r = -1$ și $a_1 = m + n - 1$. Atunci $a_p = a_1 + (p-1)r = m + n - 1 - p + 1 = m + n - p$.

**4**. Se consideră șirul: 1, 5, 9, $\cdots$. Determinați rangul termenului 401.

**Soluție**. Se observă că șirul este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 4$. Notăm cu $k$ rangul termenului 401 și avem: $401 = 1 + (k-1) \cdot 4 \Rightarrow k = 101$.

**5. D**eterminați progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 + a_3 = 8$ și $S_4 = 22$.

**Soluție**. $a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2r = 8 \Rightarrow a_1 + r = 4$.

$$S_4 = 22 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_4)4}{2} = 22 \Rightarrow 2a_1 + 3r = 11.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuații obținem: $a_1 = 1$ și $r = 3$.

**6**. Rezolvați ecuația:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + x = 100.$$

**Soluție**. Notăm cu $n$ numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este $r = 2$, primul termen $a_1 = 1$ și suma $S = 100$. Atunci: $S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]\cdot n}{2} = 100 \Rightarrow n^2 = 100 \Rightarrow n = 10$.

**7.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_k$ suma primilor $k$ termeni ai săi. Să se demonstreze că dacă $S_m = m$ și $S_n = n$, $m \neq n$, atunci $S_p = p\ (\forall)p \in \mathbf{N}^*$.

**Soluție.** $S_m = m \Rightarrow \frac{[a_1 + a_m]m}{2} = m \Rightarrow 2a_1 + (m-1)r = 2$.

$$S_n = n \Rightarrow \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = n \Rightarrow 2a_1 + (n-1)r = 2.$$

Scăzând membru cu membru cele două relații obținem:

$r(m-n) = 0 \Rightarrow r = 0\ (m \neq n)$. Atunci $a_1 = 1$.

$$S_p = \frac{[a_1 + a_p]p}{2} = \frac{(1+1)p}{2} = p.$$

**8.** Dacă numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $a, b, c$ sunt în progresie aritmetică sau $a + b + c = 0$.

**Soluție**. Deoarece numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci are loc relația:

$$b^2 - ac = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} \Rightarrow a^2 - bc + c^2 - ab - 2b^2 +$$

$$+2ac = 0 \Rightarrow (a + c)^2 - b^2 - b(a + b + c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a - b + c) - b(a + b + c) = 0 \Rightarrow (a + b + c) \cdot$$

$$\cdot (a - 2b + c) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \text{ sau } b = \frac{a + c}{2}.$$

**9**. Arătați că dacă $a > 0, b > 0, c > 0$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

**Soluție**. Fie $r$ rația progresiei. Notăm:

$$A = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{c - b} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{r}.$$

Analog obținem:

$$B = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{2r},$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{r}.$$

Evident $2B = A + C$ și atunci rezultă că numerele $A, B, C$ sunt în progresie aritmetică.

**10.** Rezolvați **e**cuația $2 + 5 + 8 + \cdots + x = 155$, unde $x$ este număr natural.

**Soluție.** Notăm cu $n$ numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este $r = 3$, primul termen $a_1 = 2$ și suma $S = 155$. Atunci: $S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2} = 155 \Rightarrow \cdots \Rightarrow$

$\Rightarrow 3n^2 + n = 310 = 0$, cu soluția naturală $n = 10$.

Atunci $x = a_1 + (n - 1)r = 2 + 9 \cdot 3 = 29$.

### c) Probleme propuse spre rezolvare

**1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică cu $a_1 = 2$ și rația $r = 2$.
Calculați $a_5, a_{10}$ și $S_5$.

**2.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică cu $a_6 = 16$ și rația $r = 3$.
Calculați primul termen $a_1$ și apoi $a_{10}$ și $S_{10}$.

**3.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $a_1 + a_5 = 10$ și $a_3 + a_8 = 10$.
Calculați termenul $a_{10}$ și $S_{10}$.

**4**. Demonstrează că numerele:
a) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ ; b) $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$
nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**5.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $a_4 + a_5 = 23$ și $a_1 + a_2 + a_3 = 12$.
Calculați termenul $a_8$ și suma $S_8$.

**6.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $S_4 = 10, S_6 = 21$.
Calculați rația *r*, termenul $a_5$ și suma $S_{100}$.

**7.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât să avem: $a_1 + {} + a_2 + a_3 = 12$ și $a_2 + a_3 + a_4 = 18$.
Calculați suma primilor 15 termeni ai progresiei

**8**. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, astfel încât să avem egalitățile $a_m = m$ și $a_n = n, m \neq n$.
Calculați $a_{p,}\ p \in \mathbf{N}^*$.

**9**. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu suma primilor *n* termeni egală cu $n^2 + n$.
Arătați că șirul este progresie aritmetică și calculați termenul general al șirului.

**10**. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = m^2$ și $a_n = n^2, m \neq n$ să se calculeze $a_p, S_p, S_m, S_n$.

**11.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = n^2$ și $a_n = m^2, m \neq n$ să se calculeze $a_p, S_p, S_m, S_n$.

# CUPRINS