2. Funcții și ecuații

2.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate. Funcții inversabile

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Injectivitate

Definiție. O funcție $f : A \to B$ se numește **injectivă** dacă oricare ar fi $a, b \in A, a \neq b$, rezultă $f(a) \neq f(b)$.

Consecință. O funcție $f : A \to B$ este **injectivă** dacă oricare ar fi $a, b \in A,$ astfel încât $f(a) = f(b)$, rezultă $a = b$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3x + 1$ este injectivă deoarece $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 1 = 3b + 1 \Rightarrow a = b$.

Observație. O funcție $f : A \to B$ **nu este injectivă** dacă există $a, b \in A, a \neq b,$ astfel încât $f(a) = f(b)$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ nu este injectivă deoarece $1 \neq 3$ și $f(1) = f(3) = 0$.

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu injectivă

O funcție numerică $f : A \to B$ este **injectivă** dacă orice paralelă la axa *Ox* dusă prin punctele codomeniului, reprezentat pe *Oy* intersectează graficul funcției în cel mult un punct.

2. Surjectivitate

Definiție. O funcție $f : A \to B$ se numește **surjectivă** dacă oricare ar fi $b \in B$, există cel puțin un element $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$.

Consecințe.

1) O funcție $f : A \to B$ este **surjectivă** dacă $\operatorname{Im} f = B$.

2) O funcție $f : A \to B$ este **surjectivă** dacă oricare ar fi $b \in B$, ecuația în $x, f(x) = b$ are cel puțin o soluție în mulțimea *A*.

Exemplu. Funcția $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}, f(1) = f(2) = a,$ $f(3) = b$, este surjectivă deoarece $\operatorname{Im} f = B$.

Observație. O funcție $f : A \to B$ **nu este surjectivă** dacă există cel puțin un punct $b \in B$, astfel încât oricare ar fi $a \in A$, $f(a) \neq b$.

Exemplu. Funcția $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x^2$ nu este surjectivă deoarece ecuația $f(x) = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5$ nu are soluții în $\mathbf{Z}$.

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu surjectivă

O funcție numerică $f : A \to B$ este **surjectivă** dacă orice paralelă la axa *Ox* dusă prin punctele codomeniului, reprezentat pe *Oy* intersectează graficul funcției în cel puțin un punct.

3. Bijectivitate

Definiție. O funcție $f : A \to B$ se numește **bijectivă** dacă este injectivă și surjectivă.

Consecință. O funcție $f : A \to B$ este **bijectivă** dacă și numai dacă oricare ar fi $b \in B$, există un unic $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 4x - 3$ este evident atât injectivă cât și surjectivă și atunci este bijectivă.

Observație. O funcție $f : A \to B$ **nu este bijectivă** dacă nu este injectivă sau nu este surjectivă.

Exemple. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ nu este injectivă, iar funcția $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x^2$ nu este surjectivă și atunci cele două funcții nu sunt bijective.

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu bijectivă

O funcție numerică $f : A \to B$ este **bijectivă** dacă orice paralelă la axa *Ox* dusă prin punctele codomeniului, reprezentat pe *Oy* intersectează graficul funcției într-un singur punct.

Inversabilitate

Definiție. O funcție $f : A \to B$ se numește **inversabilă** dacă există o funcție $g : B \to A$ astfel încât $gof = 1_A$ și $fog = 1_A$.

Exemplu. Funcția f :**R** →**R,** $f(x) = 2x + 1$, este inversabilă deoarece pentru funcția g :**R** →**R**, $g(x) = \frac{x-1}{2}$ avem:

$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\cdot \frac{x-1}{2} + 1 = x$ și

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = x$.

Consecință. O funcție $f : A \to B$ este **inversabilă** dacă și numai dacă este bijectivă. Inversa funcției f se notează cu f^{-1}.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 2$ este bijectivă deoarece este injectivă și surjectivă. Notăm $y = f(x)$ și avem:
$y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow f^{-1}(y) = y - 2.$

b) Probleme rezolvate

1. Arătați că funcțiile următoare sunt injective:

a) $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=2$.

b) $f:\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x)=2x-1$.

c) $f:(1,+\infty) \to \mathbf{R}, f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Soluție. a) $f(1) \neq f(2); f(2) \neq f(3); f(1) \neq f(3)$ și atunci f este injectivă.

b) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1 \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ și atunci *f* este injectivă.

c) Fie $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1}=\frac{x_2}{x_2^2+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1x_2^2+x_1=x_2x_1^2+x_2 \Rightarrow x_1x_2(x_2-x_1)+(x_1-x_2)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_2-x_1)(x_1x_2-1)=0 \quad (1)$.

Însă $x_1, x_2 \in (1,+\infty) \Rightarrow x_1>1, x_2>1 \Rightarrow x_1x_2>1$ și atunci din (1) rezultă $x_2-x_1=0 \Rightarrow x_1=x_2$ și *f* este injectivă.

2. Arătați că funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{dacă } x \in (-\infty,1) \\ 2-x & \text{dacă } x \in [1,+\infty) \end{cases}$ este injectivă.

Soluție. a) Dacă $x_1, x_2 \in (-\infty,1)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1-1=x_2-1 \Rightarrow x_1=x_2$ și atunci *f* este injectivă.

b) Dacă $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2-x_1=2-x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ și atunci *f* este injectivă.

c) Dacă $x_1 \in (-\infty,1)$ și $x_2 \in [1,+\infty)$ atunci $x_1<1 \leq x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 \neq x_2$. Atunci $x_1-1<0 \leq x_2-1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ și atunci *f* este injectivă.

3. Arătați că funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{dacă } x \leq -1 \\ 5 & \text{dacă } x>-1 \end{cases}$ nu este injectivă.

Soluție. Pentru $x_1=1$ și $x_2=2$ avem: $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1)=$
$=f(x_2)=5$ și atunci f nu este injectivă.

4. Arătați că funcțiile următoare sunt surjective:

a) $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=2$.

b) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=3x+1$.

c) $f:(0,+\infty) \to \mathbf{R}, f(x)=x^2-1$.

Soluție. a) Trebuie să arătăm că $(\forall)y \in \{1,2,3\} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists)x \in \{1,2,3\}$ astfel încât $f(x) = y$.
$y = 1 \Rightarrow (\exists)1 \in \{1,2,3\}$ astfel încât $f(1) = 1$.
$y = 2 \Rightarrow (\exists)3 \in \{1,2,3\}$ astfel încât $f(3) = 2$.
$y = 3 \Rightarrow (\exists)2 \in \{1,2,3\}$ astfel încât $f(2) = 3$.
b) Trebuie să arătăm că $(\forall)y \in \mathbf{R}$, $(\exists)x \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{3} \in \mathbf{R}$, ceea ce este adevărat.
c) Trebuie să arătăm că $(\forall)y \in \mathbf{R}$, $(\exists)x \in (0,+\infty)$ astfel încât
$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y+1}$ **.** Evident $x = \sqrt{y+1} \in$
$\in (0,+\infty)$ și atunci *f* este surjectivă.

5. Arătați că funcțiile următoare nu sunt surjective:
a) $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = x + 3$.
b) $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x^2$.

Soluție. a) Luăm $y = 1$ și arătăm că $(\forall)x \in \mathbf{N}$ $f(x) \neq y$.
Avem: $(\forall)x \in \mathbf{N}$ $f(x) = x + 3 \geq 3 > 1 = y \Rightarrow f(x) \neq y$.
b) Luăm $y = 2$ și arătăm că $(\forall)x \in \mathbf{Z}$ $f(x) \neq y$.
Avem: $(\forall)x \in \mathbf{Z}$ $f(x) = x^2 \neq 2 = y \Rightarrow f(x) \neq y$.

6. Arătați că funcțiile următoare sunt bijective și calculați în fiecare caz în parte inversa funcției:
a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 3$.
b) $f: [0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$.

Soluție. a) Fie $x, y \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x + 3 =$
$= 2y + 3 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ și atunci funcția *f* este injectivă.
Arătăm acum că $(\forall)y \in \mathbf{R}$, $(\exists)x \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x + 3 = y \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$ și atunci *f* este surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă, rezultă că *f* este bijectivă și funcția inversă este $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.
b) Fie $x, y \in [0,\infty)$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ și atunci funcția *f* este injectivă.
Arătăm acum că $(\forall)y \in \mathbf{R}$, $(\exists)x \in [0,\infty)$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ și atunci *f* este surjectivă.

7. Arătați că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{dacă } x \leq 4 \\ 2x-7 & \text{dacă } x > 4 \end{cases}$ este bijectivă. Determinați funcția inversă f^{-1}.

Soluție. Fie $x \leq 4, y \leq 4$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow x - 3 =$
$= y - 3 \Rightarrow x = y$ și atunci funcția f este injectivă pentru $x \leq 4$.
Fie $x > 4, y > 4$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x - 7 = 2y - 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ și atunci funcția f este injectivă pentru $x > 4$.
Fie $x \leq 4$ și $y > 4$. Atunci: $f(x) = x - 3 \leq 4 - 3 = 1$ și $f(y) =$
$= 2y - 7 > 2 \cdot 4 - 7 = 1$. Rezultă $f(x) = x - 3 < 1 < f(y) =$
$= 2y - 7 \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ și atunci funcția f este injectivă.
Fie $y \in \mathbf{R}$. Atunci $y \leq 1$ sau $y > 1$.
Dacă $y \leq 1$ vom arăta că există $x \leq 4$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 3 = y \Leftrightarrow x = y + 3$.
Dacă $y > 1$ vom arăta că există $x > 4$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - 7 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+7}{2}$.
Atunci f este surjectivă și deci bijectivă. Funcția inversă este:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y+3 & \text{dacă } y \leq 1 \\ \frac{y+7}{2} & \text{dacă } y > 1 \end{cases}.$$

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie funcțiile:

a) $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$.
b) $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}, f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 2$.
c) $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 2$.
d) $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,5\}, f(1) = 5, f(2) = 3, f(3) = 5$.
e) $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1$.

Numărul funcțiilor injective este egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

2. Fie funcțiile:

a) $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$.
b) $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$.
c) $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$.
d) $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,5\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$.

e) $f:\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 3.$

Numărul funcțiilor surjective este egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

3. Fie funcțiile: a) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x - 1;$
b) $f:[0,1] \to [1,2], f(x) = x + 1;$ c) $f:[1,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 1$
d) $f:[0,1] \to [1,3], f(x) = 2x + 1;$ e) $f:[1,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^3$.

Numărul funcțiilor bijective este egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

4. Fie funcțiile:

a) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 1;$
b) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^4 - x^3 + 2;$
c) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x - 1|;$
d) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3x + 1;$
e) $f:[1,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 1$.

Numărul funcțiilor care nu sunt injective este egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

5. Fie funcțiile:

a) $f:[0,1] \to [1,3], f(x) = 4x + 1;$
b) $f:[-1,1] \to [-2,6], f(x) = 3x + 1;$
c) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$
d) $f:[0,5] \to [3,8], f(x) = x + 3;$
e) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \leq 1 \\ 15 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}.$

Numărul funcțiilor care nu sunt surjective este egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

6. Fie funcțiile:

a) $f:[0,1] \to [1,3], f(x) = 2x + 1;$
b) $f:[-1,1] \to [-2,4], f(x) = 3x + 1;$
c) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 1$;
d) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x - 1| + |x + 1|;$
e) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^{100} + x^{99} - 1.$

Numărul funcțiilor care nu sunt bijective este egal cu:

1 **2** **3** **4** **5**

2.2 Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinal 2 sau 3

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^n$, unde $n \in \mathbf{N}, n \neq 0$ se numește **funcție putere de gradul *n***.

Dacă n este par graficul funcției este prezentat în fig. 1, iar dacă n este impar graficul funcției este prezentat în fig. 2.

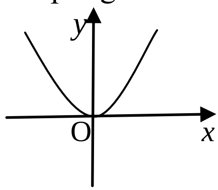


fig. 1

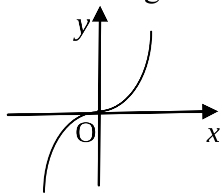


fig. 2

Observație. Reprezentarea grafică a unei astfel de funcții se face prin puncte.

2. Funcția $f: \begin{cases} [0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \text{ par} \\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, \ n \text{ impar} \end{cases}$ se numește **funcție radical de ordinul *n***.

Dacă n este par graficul funcției este prezentat în fig. 1, iar dacă n este impar graficul funcției este prezentat în fig. 2.

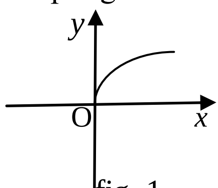


fig. 1

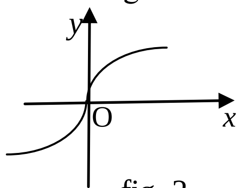


fig. 2

Observație. Reprezentarea grafică a unei astfel de funcții se face prin puncte.

3. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinal 2 sau 3

Orice ecuație în care necunoscuta se găsește sub unul sau mai mulți radicali se numește **ecuație irațională**.

Înainte de rezolvarea unei ecuații iraționale se pun condițiile:

1) funcțiile de sub radicalii de ordin 2 să fie pozitive.

2) ambii membri ai ecuației trebuie să aibă același semn.

Pentru rezolvarea unei ecuații iraționale nu există o metodă generală. Prin diverse metode, ecuația trebuie transformată succesiv într-o ecuație care nu mai conține radicali și care poate fi rezolvată folosind cunoștințele acumulate.

Printre metodele folosite amintim:

a) ridicarea succesivă la putere;
b) folosirea formulelor pentru radicalii compuși;
c) folosirea proprietăților proporțiilor;
d) înmulțirea ecuației cu expresii conjugate;
e) amplificarea unor fracții cu conjugata numitorului;
f) efectuarea unor substituții.

b) Probleme rezolvate

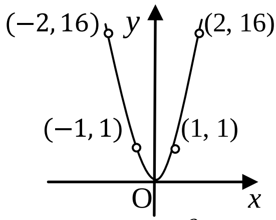
1. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^4$ b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Soluție. Facem câte un tabel pentru fiecare funcție.

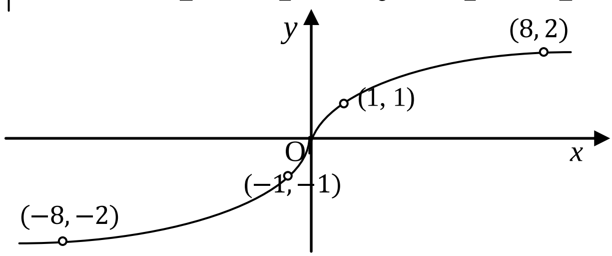
a) $f(-2)=(-2)^4=16; f(-1)=(-1)^4=1; f(1)=1; f(2)=$
$=2^4=16.$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		16	1	0	1	16	



b) $f(-8)=\sqrt[3]{-8}=-2; f(-1)=\sqrt[3]{-1}=-1; f(1)=1; f(8)=2.$

x	$-\infty$	-8	-1	0	1	8	$+\infty$
$f(x)$		-2	-1	0	1	2	



2. Rezolvați în **R** ecuația $\sqrt{3x+1} = x - 1$.

Soluție. Se pun condițiile: $3x + 1 \geq 0$ și $x - 1 \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ și $x \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty)$.

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației și obținem:
$3x + 1 = (x-1)^2 \Rightarrow 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = 5$. Corespunde $x = 5 \in [1, \infty)$.

3. Rezolvați în **R** ecuația:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x} = 2.$$

Soluție. Punem mai întâi condițiile: $x + 2 \geq 0$ și $2 - x \geq 0$, care prin rezolvare ne dau $x \in [-2, 2]$. Trecem radicalul $-\sqrt{2-x}$ în partea dreaptă pentru a pozitiva ambii membri și obținem:

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x} + 2.$$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației și obținem:
$x + 2 = 2 - x + 4 + 4\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2x - 4 = 4\sqrt{2-x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 2 = 2\sqrt{2-x}$. Punem condiția suplimentară $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$x \in [2, \infty)$. Condiția este acum $x \in [-2, 2] \cap [2, \infty) = \{2\}$.
Ridicând la pătrat ambii membri obținem ecuația:
$(x-2)^2 = 4(x-2) \Rightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 2$ sau $x = 6$.
Ținând cont de condiție rezultă soluția corectă $x = 2$.

4. Rezolvați în **R** ecuația: $\frac{3\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}} = 12$.

Soluție. Punem mai întâi condițiile: $x - 1 \geq 0, x + 4 \geq 0$ și
$2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} \neq 0$.
$x - 1 \geq 0, x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1; x \geq -4 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty)$.
$2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x+4} \Rightarrow 4(x-1) = x +$
$+4 \Rightarrow 4x - 4 = x + 4 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$. Deci $x \in [1, \infty) - \left\{\frac{8}{3}\right\}$.
Se aduce la acelați numitor și se obține:
$3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+4} = 24\sqrt{x-1} - 12\sqrt{x+4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 21\sqrt{x-1} = 14\sqrt{x+4} \Rightarrow 3\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 9(x-1) = 4(x+4) \Rightarrow 9x - 9 = 4x + 16 \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5$,
care este corectă deoarece $5 \in [1, \infty) - \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

5. Rezolvați în **R** ecuația $\sqrt[3]{x+5} = x - 1$.

Soluție. Deoarece radicalul este de ordin 3 nu se pune nici o condiție. Se ridică ambii membri la puterea 3 și obținem:

$x + 5 = (x-1)^3 \Rightarrow x + 5 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) + 2(x-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)(x^2+2) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

6. Rezolvați în **R** ecuația $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1$.

Soluție. Deoarece radicalii sunt de ordin 3 nu se pune nici o condiție. Se ridică ambii membri la puterea 3 și obținem:

$(x+2) - 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5}\left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5}\right) -$

$-(x-5) = 1$.

Înlocuind $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5}$ cu 1 obținem:

$(x+2) - 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5} - (x-5) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5} \Rightarrow \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)(x-5) = 8 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_1 = -3$ și $x_2 = 6$.

7. Rezolvați în **R** ecuația $\sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4$.

Soluție. Se pun condițiile: $x + 11 \geq 0$; $x + \sqrt{x+11} \geq 0$; $x - \sqrt{x+11} \geq 0$. Se ridică ambii membri la puterea 2 și obținem:

$x + \sqrt{x+11} + x - \sqrt{x+11} + 2\sqrt{x + \sqrt{x+11}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{x+11}} =$

$= 16 \Rightarrow 2\sqrt{x + \sqrt{x+11}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 16 - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\left(x + \sqrt{x+11}\right)\left(x - \sqrt{x+11}\right)} = 8 - x$.

Se pune condiția suplimentară $8 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$.

Se ridică la pătrat ambii membri ai ecuației și se obține:

$x^2 - (x+11) = (8-x)^2 \Rightarrow x^2 - x - 11 = 64 - 16x + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x = 75 \Rightarrow x = 5$, soluție corectă deoarece verifică toate condițiile.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^4$.
Calculați $f(4)-f(2)$ și arătați că are valoarea:

40 50 60 70 80

2. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{1}{27}\cdot x^3$.
Calculați $f(6)-f(3)$ și arătați că are valoarea:

4 5 6 7 8

3. Reprezentați grafic funcția $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt{x}$.
Calculați $f(25)-f(9)$ și arătați că are valoarea:

1 2 3 4 5

4. Reprezentați grafic funcția $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=2\sqrt[3]{x}$.
Calculați $f(27)-f(8)$ și arătați că are valoarea:

1 2 3 4 5

5. Soluția ecuației $\sqrt{x-3}=2$ este:

4 5 6 7 8

6. Soluția ecuației $\sqrt{2x-3}=5$ este:

14 15 16 17 18

7. Soluția ecuației $\sqrt[3]{x+1}=2$ este:

4 5 6 7 8

8. Soluția ecuației $\sqrt[3]{4-x}=1$ este:

1 2 3 4 5

9. Soluția ecuației: $\sqrt{x+1}=5-x$ este:

2 3 4 5 6

10. Soluția ecuației: $\sqrt{2x+1}=x-1$ este:

2 3 4 5 6

11. Soluția ecuației $\sqrt[3]{x^3+x-2}=x$ este:

1 2 3 4 5

12. Ecuația $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = x$ are un număr de soluții egal cu:

0 **1** **2** **3** **4**

13. Soluția ecuației: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$ este:

2 **3** **4** **5** **6**

14. Soluția ecuației: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

15. Soluția ecuației: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

16. Soluția ecuației: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^3-1} = 0$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

17. Soluția ecuației: $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}{3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}} = 3$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

18. Soluția ecuației: $\frac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}} = \frac{1}{3}$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

19. Soluția ecuației $\sqrt{x + \sqrt{x+74}} + \sqrt{x - \sqrt{x+74}} = 10$ este:

23 **24** **25** **26** **27**

20. Soluția ecuației $\sqrt{x + \sqrt{3x+6}} + \sqrt{x - \sqrt{3x+6}} = 6$ este:

8 **9** **10** **11** **12**

21. Suma soluțiilor ecuației $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{4-x} = 3$ este:

−2 **−1** **0** **1** **2**

22. Soluția naturală a ecuației $\sqrt[3]{3x+15} - \sqrt[3]{3x-11} = 2$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

CUPRINS