

2. Funcții și ecuații

2.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate. Funcții inversabile

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Injectivitate

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow B$ se numește **injectivă** dacă oricare ar fi $a, b \in A, a \neq b$, rezultă $f(a) \neq f(b)$.

Consecință. O funcție $f : A \rightarrow B$ este **injectivă** dacă oricare ar fi $a, b \in A$, astfel încât $f(a) = f(b)$, rezultă $a = b$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x + 1$ este injectivă deoarece $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 1 = 3b + 1 \Rightarrow a = b$.

Observație. O funcție $f : A \rightarrow B$ **nu este injectivă** dacă există $a, b \in A, a \neq b$, astfel încât $f(a) = f(b)$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ nu este injectivă deoarece $1 \neq 3$ și $f(1) = f(3) = 0$.

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu injectivă

O funcție numerică $f : A \rightarrow B$ este **injectivă** dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului, reprezentat pe Oy intersectează graficul funcției în cel mult un punct.

2. Surjectivitate

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow B$ se numește **surjectivă** dacă oricare ar fi $b \in B$, există cel puțin un element $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$.

Consecințe.

1) O funcție $f : A \rightarrow B$ este **surjectivă** dacă $\text{Im } f = B$.

2) O funcție $f : A \rightarrow B$ este **surjectivă** dacă oricare ar fi $b \in B$, ecuația în $x, f(x) = b$ are cel puțin o soluție în mulțimea A .

Exemplu. Funcția $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}, f(1) = f(2) = a, f(3) = b$, este surjectivă deoarece $\text{Im } f = B$.

Observație. O funcție $f : A \rightarrow B$ **nu este surjectivă** dacă există cel puțin un punct $b \in B$, astfel încât oricare ar fi $a \in A, f(a) \neq b$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = x^2$ nu este surjectivă deoarece ecuația $f(x) = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5$ nu are soluții în \mathbf{Z} .

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu surjectivă

O funcție numerică $f : A \rightarrow B$ este **surjectivă** dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului, reprezentat pe Oy intersectează graficul funcției în cel puțin un punct.

3. Bijectivitate

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow B$ se numește **bijectivă** dacă este injectivă și surjectivă.

Consecință. O funcție $f : A \rightarrow B$ este **bijectivă** dacă și numai dacă oricare ar fi $b \in B$, există un unic $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4x - 3$ este evident atât injectivă cât și surjectivă și atunci este bijectivă.

Observație. O funcție $f : A \rightarrow B$ **nu este bijectivă** dacă nu este injectivă sau nu este surjectivă.

Exemple. Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ nu este injectivă, iar funcția $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = x^2$ nu este surjectivă și atunci cele două funcții nu sunt bijective.

Modalitate grafică de a verifica dacă o funcție numerică este sau nu bijectivă

O funcție numerică $f : A \rightarrow B$ este **bijectivă** dacă orice paralelă la axa Ox dusă prin punctele codomeniului, reprezentat pe Oy intersectează graficul funcției într-un singur punct.

Inversabilitate

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow B$ se numește **inversabilă** dacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $gof = 1_A$ și $fog = 1_A$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$, este inversabilă deoarece pentru funcția $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \frac{x-1}{2}$ avem:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x-1}{2} + 1 = x \text{ și}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = x.$$

Consecință. O funcție $f : A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă și numai dacă este bijectivă. Inversa funcției f se notează cu f^{-1} .

Exemplu. Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 2$ este bijectivă deoarece este injectivă și surjectivă. Notăm $y = f(x)$ și avem:
 $y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow f^{-1}(y) = y - 2$.

b) Probleme rezolvate

1. Arătați că funcțiile următoare sunt injective:

a) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2.$

b) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = 2x - 1.$

c) $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$

Soluție. a) $f(1) \neq f(2); f(2) \neq f(3); f(1) \neq f(3)$ și atunci f este injectivă.

b) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ și atunci f este injectivă.

c) Fie $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 = x_2x_1^2 + x_2 \Rightarrow x_1x_2(x_2 - x_1) + (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1) = 0 \quad (1).$

Însă $x_1, x_2 \in (1, +\infty) \Rightarrow x_1 > 1, x_2 > 1 \Rightarrow x_1x_2 > 1$ și atunci din (1) rezultă $x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ și f este injectivă.

2. Arătați că funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \\ 2 - x & \text{dacă } x \in [1, +\infty) \end{cases}$

este injectivă.

Soluție. a) Dacă $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ și atunci f este injectivă.

b) Dacă $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 - x_1 = 2 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ și atunci f este injectivă.

c) Dacă $x_1 \in (-\infty, 1)$ și $x_2 \in [1, +\infty)$ atunci $x_1 < 1 \leq x_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1 \neq x_2$. Atunci $x_1 - 1 < 0 \leq x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ și atunci f este injectivă.

3. Arătați că funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dacă } x \leq -1 \\ 5 & \text{dacă } x > -1 \end{cases}$ nu este injectivă.

Soluție. Pentru $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ avem: $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) =$
 $= f(x_2) = 5$ și atunci f nu este injectivă.

4. Arătați că funcțiile următoare sunt surjective:

a) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2.$

b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x + 1.$

c) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 1.$

Soluție. a) Trebuie să arătăm că $(\forall)y \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow (\exists)x \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $f(x) = y$.

$y = 1 \Rightarrow (\exists)1 \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $f(1) = 1$.

$y = 2 \Rightarrow (\exists)3 \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $f(3) = 2$.

$y = 3 \Rightarrow (\exists)2 \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $f(2) = 3$.

b) Trebuie să arătăm că $(\forall)y \in \mathbf{R}, (\exists)x \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow 3x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{3} \in \mathbf{R}$, ceea ce este adevărat.

c) Trebuie să arătăm că $(\forall)y \in \mathbf{R}, (\exists)x \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y+1}$. Evident $x = \sqrt{y+1} \in (0, +\infty)$ și atunci f este surjectivă.

5. Arătați că funcțiile următoare nu sunt surjective:

a) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = x + 3$.

b) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = x^2$.

Soluție. a) Luăm $y = 1$ și arătăm că $(\forall)x \in \mathbf{N} f(x) \neq y$.
Avem: $(\forall)x \in \mathbf{N} f(x) = x + 3 \geq 3 > 1 = y \Rightarrow f(x) \neq y$.

b) Luăm $y = 2$ și arătăm că $(\forall)x \in \mathbf{Z} f(x) \neq y$.

Avem: $(\forall)x \in \mathbf{Z} f(x) = x^2 \neq 2 = y \Rightarrow f(x) \neq y$.

6. Arătați că funcțiile următoare sunt bijective și calculați în fiecare caz în parte inversa funcției:

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 3$.

b) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2$.

Soluție. a) Fie $x, y \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x + 3 = 2y + 3 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ și atunci funcția f este injectivă.

Arătăm acum că $(\forall)y \in \mathbf{R}, (\exists)x \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 3 = y \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$ și atunci f este surjectivă.

Fiind injectivă și surjectivă, rezultă că f este bijectivă și funcția inversă este $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.

b) Fie $x, y \in [0, \infty)$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ și atunci funcția f este injectivă.

Arătăm acum că $(\forall)y \in \mathbf{R}, (\exists)x \in [0, \infty)$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ și atunci f este surjectivă.

7. Arătați că funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{dacă } x \leq 4 \\ 2x - 7 & \text{dacă } x > 4 \end{cases}$ este bijectivă. Determinați funcția inversă f^{-1} .

Soluție. Fie $x \leq 4, y \leq 4$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow x - 3 = y - 3 \Rightarrow x = y$ și atunci funcția f este injectivă pentru $x \leq 4$. Fie $x > 4, y > 4$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x - 7 = 2y - 7 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ și atunci funcția f este injectivă pentru $x > 4$. Fie $x \leq 4$ și $y > 4$. Atunci: $f(x) = x - 3 \leq 4 - 3 = 1$ și $f(y) = 2y - 7 > 2 \cdot 4 - 7 = 1$. Rezultă $f(x) = x - 3 < 1 < f(y) = 2y - 7 \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ și atunci funcția f este injectivă.

Fie $y \in \mathbf{R}$. Atunci $y \leq 1$ sau $y > 1$.

Dacă $y \leq 1$ vom arăta că există $x \leq 4$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow x - 3 = y \Leftrightarrow x = y + 3$.

Dacă $y > 1$ vom arăta că există $x > 4$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 7 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+7}{2}$.

Atunci f este surjectivă și deci bijectivă. Funcția inversă este:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y + 3 & \text{dacă } y \leq 1 \\ \frac{y+7}{2} & \text{dacă } y > 1 \end{cases}.$$

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie funcțiile:

- a) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$.
- b) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 2$.
- c) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 2$.
- d) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 5\}, f(1) = 5, f(2) = 3, f(3) = 5$.
- e) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1$.

Numărul funcțiilor injective este egal cu:

1 2 3 4 5

2. Fie funcțiile:

- a) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$.
- b) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$.
- c) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$.
- d) $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 5\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$.

e) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 3.$

Numărul funcțiilor surjective este egal cu:

1 2 3 4 5

3. Fie funcțiile: a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x - 1;$

b) $f: [0, 1] \rightarrow [1, 2], f(x) = x + 1;$ c) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 1$

d) $f: [0, 1] \rightarrow [1, 3], f(x) = 2x + 1;$ e) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3.$

Numărul funcțiilor bijective este egal cu:

1 2 3 4 5

4. Fie funcțiile:

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 1;$

b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^4 - x^3 + 2;$

c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x - 1|;$

d) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x + 1;$

e) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 1.$

Numărul funcțiilor care nu sunt injective este egal cu:

1 2 3 4 5

5. Fie funcțiile:

a) $f: [0, 1] \rightarrow [1, 3], f(x) = 4x + 1;$

b) $f: [-1, 1] \rightarrow [-2, 6], f(x) = 3x + 1;$

c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2$

d) $f: [0, 5] \rightarrow [3, 8], f(x) = x + 3;$

e) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \leq 1 \\ 15 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}.$

Numărul funcțiilor care nu sunt surjective este egal cu:

1 2 3 4 5

6. Fie funcțiile:

a) $f: [0, 1] \rightarrow [1, 3], f(x) = 2x + 1;$

b) $f: [-1, 1] \rightarrow [-2, 4], f(x) = 3x + 1;$

c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 1;$

d) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x - 1| + |x + 1|;$

e) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^{100} + x^{99} - 1.$

Numărul funcțiilor care nu sunt bijective este egal cu:

1 2 3 4 5

2.2 Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinal 2 sau 3

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^n$, unde $n \in \mathbf{N}, n \neq 0$ se numește **funcție putere de gradul n** .

Dacă n este par graficul funcției este prezentat în fig. 1, iar dacă n este impar graficul funcției este prezentat în fig. 2.

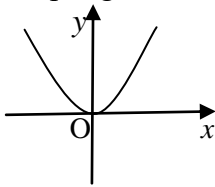


fig. 1

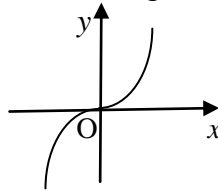


fig. 2

Observație. Reprezentarea grafică a unei astfel de funcții se face prin puncte.

2. Funcția $f: \begin{cases} [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \text{ par} \\ \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \text{ impar} \end{cases}$ se numește **funcție radical de ordinul n** .

Dacă n este par graficul funcției este prezentat în fig. 1, iar dacă n este impar graficul funcției este prezentat în fig. 2.

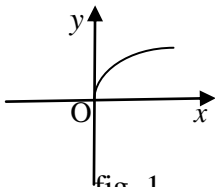


fig. 1

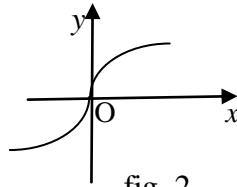


fig. 2

Observație. Reprezentarea grafică a unei astfel de funcții se face prin puncte.

3. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinal 2 sau 3

Orice ecuație în care necunoscuta se găsește sub unul sau mai mulți radicali se numește **ecuație irațională**.

Înainte de rezolvarea unei ecuații iraționale se pun condițiile:

- 1) funcțiile de sub radicalii de ordin 2 să fie pozitive.
- 2) ambii membri ai ecuației trebuie să aibă același semn.

Pentru rezolvarea unei ecuații iraționale nu există o metodă generală. Prin diverse metode, ecuația trebuie transformată succesiv într-o ecuație care nu mai conține radicali și care poate fi rezolvată folosind cunoștințele acumulate.

Printre metodele folosite amintim:

- a) ridicarea succesivă la putere;
- b) folosirea formulelor pentru radicalii compuși;
- c) folosirea proprietăților proporțiilor;
- d) înmulțirea ecuației cu expresii conjugate;
- e) amplificarea unor fracții cu conjugata numitorului;
- f) efectuarea unor substituții.

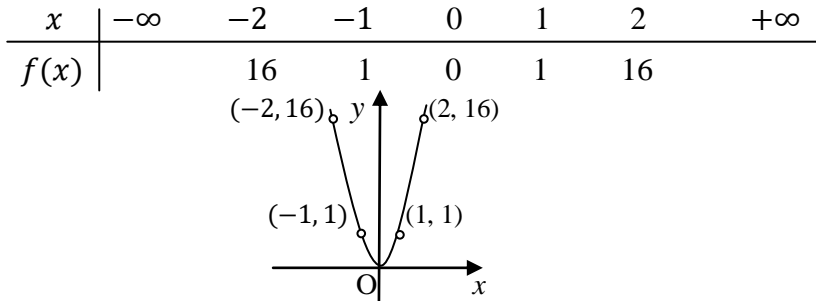
b) Probleme rezolvate

1. Reprezentați grafic funcțiile:

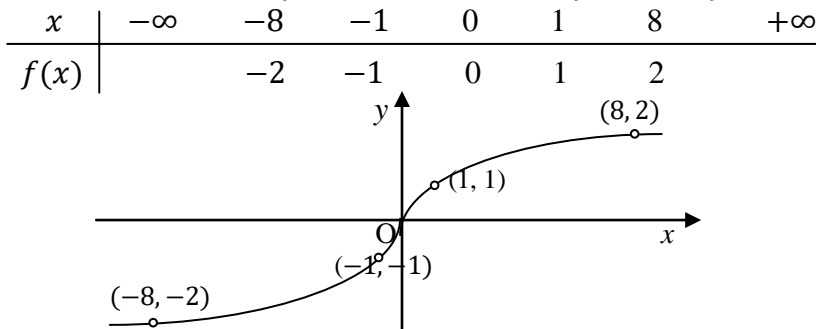
- a) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^4$ b) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Soluție. Facem câte un tabel pentru fiecare funcție.

- a) $f(-2) = (-2)^4 = 16; f(-1) = (-1)^4 = 1; f(1) = 1; f(2) = 2^4 = 16.$



- b) $f(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2; f(-1) = \sqrt[3]{-1} = -1; f(1) = 1; f(8) = 2.$



2. Rezolvați în \mathbf{R} ecuația $\sqrt{3x+1} = x - 1$.

Soluție. Se pun condițiile: $3x + 1 \geq 0$ și $x - 1 \geq 0 \Rightarrow \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ și $x \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty)$.

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației și obținem:

$3x + 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow 3x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow \Rightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = 5$. Corespunde $x = 5 \in [1, \infty)$.

3. Rezolvați în \mathbf{R} ecuația:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x} = 2.$$

Soluție. Punem mai întâi condițiile: $x + 2 \geq 0$ și $2 - x \geq 0$, care prin rezolvare ne dau $x \in [-2, 2]$. Trecem radicalul $-\sqrt{2-x}$ în partea dreaptă pentru a pozitivă ambii membri și obținem:

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x} + 2.$$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației și obținem:

$x + 2 = 2 - x + 4 + 4\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2x - 4 = 4\sqrt{2-x} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x - 2 = 2\sqrt{2-x}$. Punem condiția suplimentară $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2, \infty)$. Condiția este acum $x \in [-2, 2] \cap [2, \infty) = \{2\}$.

Ridicând la pătrat ambii membri obținem ecuația:

$(x - 2)^2 = 4(x - 2) \Rightarrow (x - 2)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 2$ sau $x = 6$. Ținând cont de condiție rezultă soluția corectă $x = 2$.

4. Rezolvați în \mathbf{R} ecuația: $\frac{3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4}} = 12$.

Soluție. Punem mai întâi condițiile: $x - 1 \geq 0$, $x + 4 \geq 0$ și

$$2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} \neq 0.$$

$x - 1 \geq 0$, $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$; $x \geq -4 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty)$.

$2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x+4} \Rightarrow 4(x-1) = x + 4 \Rightarrow 4x - 4 = x + 4 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$. Deci $x \in [1, \infty) - \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

Se aduce la același numitor și se obține:

$3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+4} = 24\sqrt{x-1} - 12\sqrt{x+4} \Rightarrow \Rightarrow 21\sqrt{x-1} = 14\sqrt{x+4} \Rightarrow 3\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow \Rightarrow 9(x-1) = 4(x+4) \Rightarrow 9x - 9 = 4x + 16 \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5$, care este corectă deoarece $5 \in [1, \infty) - \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

5. Rezolvați în \mathbf{R} ecuația $\sqrt[3]{x+5} = x-1$.

Soluție. Deoarece radicalul este de ordin 3 nu se pune nici o condiție. Se ridică ambii membri la puterea 3 și obținem:

$$\begin{aligned}x+5 &= (x-1)^3 \Rightarrow x+5 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 6 &= 0 \Rightarrow x^2(x-3) + 2(x-3) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-3)(x^2+2) &= 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3.\end{aligned}$$

6. Rezolvați în \mathbf{R} ecuația $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1$.

Soluție. Deoarece radicalii sunt de ordin 3 nu se pune nici o condiție. Se ridică ambii membri la puterea 3 și obținem:

$$(x+2) - 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5} (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5}) - (x-5) = 1.$$

Înlocuind $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5}$ cu 1 obținem:

$$\begin{aligned}(x+2) - 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5} - (x-5) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6 = 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5} &\Rightarrow \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5} = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+2)(x-5) = 8 &\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 &\Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = -3 \text{ și } x_2 = 6.\end{aligned}$$

7. Rezolvați în \mathbf{R} ecuația $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$.

Soluție. Se pun condițiile: $x+11 \geq 0$; $x+\sqrt{x+11} \geq 0$; $x-\sqrt{x+11} \geq 0$. Se ridică ambii membri la puterea 2 și obținem:

$$\begin{aligned}x + \sqrt{x+11} + x - \sqrt{x+11} + 2\sqrt{x+\sqrt{x+11}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{x+11}} &= \\ = 16 \Rightarrow 2\sqrt{x+\sqrt{x+11}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{x+11}} &= 16 - 2x \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(x+\sqrt{x+11})(x-\sqrt{x+11})} &= 8 - x.\end{aligned}$$

Se pune condiția suplimentară $8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$.

Se ridică la pătrat ambii membri ai ecuației și se obține:

$$\begin{aligned}x^2 - (x+11) &= (8-x)^2 \Rightarrow x^2 - x - 11 = 64 - 16x + x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 15x &= 75 \Rightarrow x = 5, \text{ soluție corectă deoarece verifică toate } \\ \text{condițiile.}\end{aligned}$$

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4$.

Calculați $f(4) - f(2)$ și arătați că are valoarea:

40 50 60 70 80

2. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{27} \cdot x^3$.

Calculați $f(6) - f(3)$ și arătați că are valoarea:

4 5 6 7 8

3. Reprezentați grafic funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x}$.

Calculați $f(25) - f(9)$ și arătați că are valoarea:

1 2 3 4 5

4. Reprezentați grafic funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2\sqrt[3]{x}$.

Calculați $f(27) - f(8)$ și arătați că are valoarea:

1 2 3 4 5

5. Soluția ecuației $\sqrt{x-3} = 2$ este:

4 5 6 7 8

6. Soluția ecuației $\sqrt{2x-3} = 5$ este:

14 15 16 17 18

7. Soluția ecuației $\sqrt[3]{x+1} = 2$ este:

4 5 6 7 8

8. Soluția ecuației $\sqrt[3]{4-x} = 1$ este:

1 2 3 4 5

9. Soluția ecuației: $\sqrt{x+1} = 5-x$ este:

2 3 4 5 6

10. Soluția ecuației: $\sqrt{2x+1} = x-1$ este:

2 3 4 5 6

11. Soluția ecuației $\sqrt[3]{x^3+x-2} = x$ este:

1 2 3 4 5

12. Ecuația $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = x$ are un număr de soluții egal cu:
0 1 2 3 4
13. Soluția ecuației: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$ este:
2 3 4 5 6
14. Soluția ecuației: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$ este:
1 2 3 4 5
15. Soluția ecuației: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$ este:
1 2 3 4 5
16. Soluția ecuației: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^3-1} = 0$ este:
1 2 3 4 5
17. Soluția ecuației: $\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}}{3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}} = 3$ este:
1 2 3 4 5
18. Soluția ecuației: $\frac{\sqrt{x^2-5} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-5} + \sqrt{x-2}} = \frac{1}{3}$ este:
1 2 3 4 5
19. Soluția ecuației $\sqrt{x + \sqrt{x+74}} + \sqrt{x - \sqrt{x+74}} = 10$ este:
23 24 25 26 27
20. Soluția ecuației $\sqrt{x + \sqrt{3x+6}} + \sqrt{x - \sqrt{3x+6}} = 6$ este:
8 9 10 11 12
21. Suma soluțiilor ecuației $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{4-x} = 3$ este:
-2 -1 0 1 2
22. Soluția naturală a ecuației $\sqrt[3]{3x+15} - \sqrt[3]{3x-11} = 2$ este:
1 2 3 4 5

CUPRINS

	Enunțuri Rezolvări	
1. Mulțimi de numere	5	168
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	168
1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți.	5	168
1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv.		
Proprietăți ale radicalilor	8	169
1.1.3 Puteri cu exponent rațional. Aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale.		
Puteri cu exponent real	14	170
1.1.4 Noțiunea de logaritm. Proprietăți ale logaritmilor. Calcule cu logaritmi. Operația de logaritmare	18	171
1.2 Mulțimea numerelor complexe	23	173
1.2.1 Numere complexe sub formă algebrică. Conjugatul unui număr complex. Operații cu numere complexe	23	173
1.2.2 Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real	29	174
1.2.3 Rezolvarea de ecuații în \mathbb{C}	33	174
1.2.4 Numere complexe sub formă trigono- metrică	36	175
1.2.5 Rădăcinile de ordin n ale unui număr complex. Ecuații binome	42	177
1.3 Teste grilă de autoevaluare	46	180
Testul 1	46	180
Testul 2	47	181
Testul 3	48	182
2. Funcții și ecuații	49	182
2.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate. Funcții inversabile	49	182
2.2 Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinal 2 sau 3	55	184
2.3 Funcția exponențială. Ecuații exponențiale.	61	187

2.4	Funcția logaritmică. Ecuții logaritmice.	66	189
2.5	Funcții trigonometrice directe și inverse . . .	71	191
2.5.1	Funcții trigonometrice directe	71	191
2.5.2	Funcții trigonometrice inverse	79	193
2.6	Ecuții trigonometrice	87	194
2.7	Teste grilă de autoevaluare	97	197
	Testul 1	97	197
	Testul 2	98	199
	Testul 3	99	200
	Testul 4	100	201
3.	Metode de numărare	101	202
3.1	Metoda inducției matematice	101	202
3.2	Mulțimi finite ordonate	104	203
3.3	Permutări	106	203
3.4	Aranjamente	108	204
3.5	Combinări	111	205
3.6	Binomul lui Newton	114	207
3.7	Teste grilă de autoevaluare	118	209
	Testul 1	118	209
	Testul 2	119	209
	Testul 3	120	210
4.	Matematici financiare	121	211
4.1	Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA	121	211
4.2	Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice. Interpretarea datelor statistice prin parametrii de poziție	127	213
4.3	Elemente de probabilități	133	214
4.3.1	Evenimente. Operații cu evenimente	133	214
4.3.2	Probabilități. Proprietăți ale probabilităților	137	215
4.3.3	Probabilități condiționate. Evenimente independente	140	216
4.3.4	Schema lui Poisson. Schema lui Bernoulli	143	217
4.3.5	Variabile aleatoare	145	218
4.4	Teste grilă de autoevaluare	149	219
	Testul 1	149	219
	Testul 2	150	219

5. Geometrie	151	220
5.1 Reper cartezian în plan. Coordonate carteziene în plan. Distanța dintre două puncte în plan.	151	220
5.2 Coordonatele unui vector. Coordonatele sumei vectoriale. Coordonatele produsului dintre un vector și un număr real.	154	221
5.3 Ecuații ale dreptei în plan. Coliniaritate, concurență	157	222
5.4 Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan. Calcul de distanțe și arii	161	222
5.5 Teste grilă de autoevaluare	166	224
Testul 1	166	224
Testul 2	167	225