

1.1.4 Noțiunea de logaritm. Proprietăți ale logaritmilor. Calcule cu logaritmi. Operația de logaritmare.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Logaritmul unui număr real pozitiv A este exponentul x la care trebuie să ridicăm un număr real pozitiv și diferit de 1, notat a și numit bază, pentru a obține pe A .

Scriem: $\log_a A = x$, unde $A > 0, a > 0, a \neq 1$.

Observație. $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$.

Exemple. a) $\log_2 8 = 3$, deoarece $2^3 = 8$.

b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, deoarece $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$.

2. Proprietăți.

Dacă $A > 0, B > 0, a > 0, a \neq 1, b \in \mathbf{R}$, atunci:

1) $\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B$.

2) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

2') $\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B$.

3) $\log_a A^b = b \log_a A$.

3') $\log_a a^b = b$.

4) $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}$.

Exemple. a) $\log_2 5 \cdot 6 = \log_2 5 + \log_2 6$.

b) $\log_2 20 = \log_2 4 \cdot 5 = \log_2 4 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5$.

c) $\log_2 4^3 = 3 \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$.

3. Formula de schimbare de bază a unui logaritm

Dacă $A > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ atunci:

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}.$$

Exemple. a) Având logaritmul $\log_4 20$ îl schimbăm în baza 2 astfel: $\log_4 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 4} = \frac{\log_2 4 + \log_2 5}{2} = \frac{2 + \log_2 5}{2}$.

b) $\log_4 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = \frac{1}{2}$.

4. Compararea logaritmilor care au aceeași bază

Dacă $0 < a < 1$, atunci $0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$.

Dacă $a > 1$, atunci $0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$.

Exemple. a) $0 < 0,5 < 1$ și atunci $\log_{0,5} 5 > \log_{0,5} 8$.

b) $3 > 1$ și atunci $\log_3 8 < \log_3 10$.

b) Probleme rezolvate

1. Calculați:

a) $\log_2 64$ b) $\log_2 \frac{1}{16}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ d) $\lg \frac{1}{0,001}$.

Soluție. a) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$.

b) $\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$.

c) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 2}{\log_2 2^{-1}} = \frac{1}{-1} = -1$.

d) $\lg \frac{1}{0,001} = \lg \frac{1}{10^{-3}} = \lg 10^3 = 3$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$\lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \lg \frac{4}{5} + \lg \frac{5}{6} + \lg \frac{6}{7} + \lg \frac{7}{8}$$

Soluție. $\lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \lg \frac{4}{5} + \lg \frac{5}{6} + \lg \frac{6}{7} + \lg \frac{7}{8} =$

$$= \lg \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} = \lg \frac{1}{8} = \lg 1 - \lg 8 = -\lg 8.$$

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 8 + \log_{\frac{1}{16}} 16 + \log_{\frac{1}{32}} 32.$$

Soluție. $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 8 + \log_{\frac{1}{16}} 16 + \log_{\frac{1}{32}} 32 =$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} + \log_{\frac{1}{16}} \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} +$$

$$+\log_{\frac{1}{32}} \left(\frac{1}{32} \right)^{-1} = -1-1-1-1-1 = -5.$$

4. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{1}{\log_2 8} + \frac{1}{\log_4 8} + \frac{1}{\log_6 8} < 2.$$

Soluție. Se trec logaritmi în baza 8 și se obține:

$$\log_8 2 + \log_8 4 + \log_8 6 < 2 \Leftrightarrow \log_8 48 < 2 \Leftrightarrow 48 < 8^2$$

5. Arătați că dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci:

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

Soluție $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Rightarrow \log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \log_a ab =$

$$= \frac{1}{2}(1 + \log_a b) \text{ și } \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2} \log_a ab = \frac{1}{2}(\log_b a + 1).$$

Atunci $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2}(1 + \log_a b) + \frac{1}{2}(1 + \log_b a) =$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\log_a b + \log_b a) = 1 + \frac{1}{2} \left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} \right) > 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2.$$

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Valoarea calculului $\log_2 \sqrt{32}$ este:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{5}{2}$$

2. Valoarea calculului $\log_3 \sqrt{27}$ este:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{5}{1}$$

3. Valoarea calculului $\log_4 \sqrt[3]{256}$ este:

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3}$$

4. Valoarea calculului $\log_2 \sqrt{2^3 \sqrt{2}}$ este:

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3}$$

5. Valoarea calculului $\log_3 \sqrt{3 \sqrt{3}}$ este:

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{5}{4}$$

6. Valoarea calculului $\log_2 12 - \log_2 3$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

7. Valoarea calculului $\log_3 45 - \log_3 5$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

8. Valoarea calculului $\log_4 80 - \log_4 5$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

9. Valoarea calculului $\log_4 500 - \log_4 25 - \log_4 5$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

10. Valoarea calculului $\log_2 1 + \log_3 1 + \log_4 1$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

11. Valoarea calculului $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

12. Valoarea calculului $\log_{10} 4 + \log_{10} 25$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

13. Valoarea calculului $\log_6 1 + \log_6 2 + \log_6 3$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

14. Valoarea calculului $\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

15. Valoarea calculului $\log_4 2$ este:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}$$

16. Valoarea calculului $\log_4 2 + \log_8 4$ este:

$$\frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{7}{6}$$

17. Valoarea calculului $\log_4 2 + \log_2 4$ este:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{9}{2}$$

18. Valoarea calculului $\log_2 1 + \log_4 2 + \log_8 2$ este:

$$\frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{7}{6}$$

19. Valoarea calculului $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ este:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{9}{2}$$

20. Valoarea calculului $\log_4 2 + \log_2 4 + \log_8 2$ este:

$$\frac{13}{6} \quad \frac{14}{6} \quad \frac{15}{6} \quad \frac{16}{6} \quad \frac{17}{6}$$

21. Valoarea calculului $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

22. Valoarea calculului $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_3 \pi}$ este:

$$\log_{\pi} 3 \quad \log_{\pi} 4 \quad \log_{\pi} 5 \quad \log_{\pi} 6 \quad \log_{\pi} 7$$

23. Valoarea calculului $\frac{1}{\log_2 8} + \frac{1}{\log_4 8} + \frac{1}{\log_6 8}$ este:

$$\log_8 36 \quad \log_8 40 \quad \log_8 44 \quad \log_8 48 \quad \log_8 52$$

24. Valoarea calculului $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} + \frac{1}{\log_6 6}$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

25. Valoarea calculului $\frac{1}{\log_2 4} + \frac{1}{\log_3 4} + \frac{1}{\log_5 4}$ este:

$$\log_4 28 \quad \log_4 30 \quad \log_4 36 \quad \log_4 40 \quad \log_4 44$$

1.2 Mulțimea numerelor complexe

1.2.1 Numere complexe sub formă algebrică. Conjugatul unui număr complex. Operații cu numere complexe.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Mulțimea numerelor complexe este:

$$\{z = x + yi \mid x, y \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}.$$

Scrierea $z = x + yi$ se numește **forma algebrică** a numărului complex z . Numărul $x \in \mathbf{R}$ se numește **partea reală** a lui z și se notează **Re** z , iar numărul $y \in \mathbf{R}$ este coeficientul **părții imaginare** a lui z și se notează **Im** z .

Exemplu. Pentru numărul complex $2 + 3i$, 2 este partea reală și 3 este coeficientul părții imaginare.

2. Conjugatul unui număr complex

Fiind dat numărul complex $z = x + yi$, numărul $\bar{z} = x - yi$ se numește **conjugatul numărului** complex z .

Exemple. Conjugatul lui $3 + i$ este $3 - i$ și conjugatul lui $2 - i$ este $2 + i$.

3. Egalitatea a două numere complexe

Două numere complexe $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$ sunt **egale** dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Exemplu. Numerele complexe $x + 1 + yi$ și $2x + (2y - 1)i$ sunt egale dacă $x + 1 = 2x$ și $y = 2y - 1$, adică $x = 1, y = 1$.

4. Puterile numărului i

Puterile numărului i sunt: $i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, \dots$. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \end{cases}$$

Exemple. $i^{99} = -i, i^{1000} = 1, i^{2001} = i, i^{2010} = -1$.

5. Operații cu numere complexe

a) Adunarea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$, definim:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Exemplu. $(2 + 3i) + (5 - i) = (2 + 5) + (3i - i) = 7 + 2i.$

b) Scăderea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$, definim:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Exemplu. $(5 - 2i) - (3 - 5i) = (5 - 3) + (-2 + 5)i = 2 + 3i.$

c) Înmulțirea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$, definim:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i. \end{aligned}$$

Exemplu. $(3 - i)(2 + i) = (6 + 1) + (3 - 2)i = 7 + i.$

d) Împărțirea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$, definim:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i. \end{aligned}$$

Exemplu. $\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 - 1 + (1 + 2)i}{4 + 1} =$
 $= \frac{1 + 3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$

6. Proprietăți ale numerelor complexe

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$

4) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n.$

5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$

6) $\bar{\bar{z}} = z.$

7) $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.

8) $z \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Exemple. a) Fiind date $z_1 = 1 + i$ și $z_2 = 2 - i$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 - i + 2 + i = 3.$$

b) Fiind date $z_1 = 2 + i$ și $z_2 = 1 - i$, atunci

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (2 - i) \cdot (1 + i) = 2 - i + 2i - i^2 = 2 - i + 2i + 1 = 3 + i.$$

7. Modulul unui număr complex

Modulul numărului complex $z = x + yi$ este numărul pozitiv

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemplu. Pentru $z = 3 + 4i$, $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

8. Proprietăți ale modulului unui număr complex

1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

3) $|z^n| = |z|^n$.

4) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

5) $|z| = |\bar{z}|$.

6) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

7) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ – caz particular – $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

b) Probleme rezolvate

1. Calculați: $(-3 + i) + (1 + i) - (2 - i)$.

Soluție. $(-3 + i) + (1 + i) - (2 - i) = -3 + i + 1 + i - 2 + i = -4 + 3i$.

2. Calculați: $(3 - 4i)(1 + i)(5 - i)$.

Soluție. $(3 - 4i)(1 + i)(5 - i) = (3 + 3i - 4i - 4i^2)(5 - i) = (3 - i + 4)(5 - i) = (7 - i)(5 - i) = 35 - 7i - 5i + i^2 = 35 - 12i - 1 = 34 - 12i$.

3. Calculați: $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$.

Soluție. $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 = 0$.

4. Calculați: $(2 + 3i)^2$.

Soluție. $(2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

5. Calculați: $\frac{1+i}{2-i}$.

Soluție. $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{4-i^2} = \frac{1+3i}{5}$

6. Calculați: $\frac{1+2i}{2+i} + \frac{1+i}{2-i}$.

Soluție. $\frac{1+2i}{2+i} + \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2-i) + (1+i)(2+i)}{(2+i)(2-i)} =$
 $= \frac{2+4i-i-2i^2+2+2i+i+i^2}{4-i^2} = \frac{4+6i-i^2}{4+1} = \frac{5+6i}{5}$.

7. Fie $z_1 = 3 + 2i$ și $z_2 = 2 - i$. Calculați $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Soluție. $\bar{z}_1 = \overline{3 + 2i} = 3 - 2i$ și $\bar{z}_2 = \overline{2 - i} = 2 + i$ și atunci:
 $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 3 - 2i + 2 + i = 5 - i$.

8. Calculați: $\frac{\overline{1+i}}{2+i}$.

Soluție. Avem $\frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2+2i-i-i^2}{4-i^2} = \frac{3+i}{5}$, de unde

rezultă: $\frac{\overline{1+i}}{2+i} = \frac{\overline{3+i}}{5} = \frac{3-i}{5}$.

9. Fie $z_1 = 4 + 3i$ și $z_2 = 8 - 6i$. Calculați $|z_1|$, $|z_2|$ și $|z_1 + z_2|$.

Soluție. $|z_1| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $|z_2| = |8 - 6i| =$
 $= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ și $z_1 + z_2 = 4 + 3i + 8 - 6i = 12 - 3i \Rightarrow$
 $\Rightarrow |z_1 + z_2| = |12 - 3i| = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$.

10. Calculați: $\left| \frac{2+i}{3+2i} \right|$.

Soluție. $\left| \frac{2+i}{3+2i} \right| = \frac{|2+i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Valoarea calculului $(1 + 2i) + (5 - i) - (3 - i)$ este:

$$2 + i \quad 3 + i \quad 3 + 2i \quad 4 + i \quad 5 - i$$

2. Valoarea calculului $(4 + i) + (3 - 2i) + (2 + 2i)$ este:

$$2 - i \quad 2 + i \quad 3 - i \quad 9 + i \quad 7 - i$$

3. Valoarea calculului $(2 + i) + (4 - 3i) - (1 - 4i)$ este:

$$2 + i \quad 2 \quad 1 - i \quad 5 + 2i \quad 5$$

4. Valoarea calculului $(2 + i)(3 - i)$ este:

$$1 - i \quad 1 + i \quad 2 - i \quad 3 + i \quad 7 + i$$

5. Valoarea calculului $(1 + i)(2 + i)(3 + i)$ este:

$$9i \quad 10i \quad 11i \quad 12i \quad 13i$$

6. Valoarea calculului $i + i^3 + i^5 + i^7$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad i \quad 2i$$

7. Valoarea calculului $i^2 + i^4 + i^6 + i^8$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad i \quad 2i$$

8. Valoarea calculului $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6$ este:

$$0 \quad 1 \quad i \quad i - 1 \quad i + 2$$

9. Valoarea calculului $\frac{1}{i+1}$ este:

$$\frac{1+i}{2} \quad \frac{1-i}{2} \quad \frac{2+i}{2} \quad \frac{2-i}{2} \quad \frac{3+i}{2}$$

10. Valoarea calculului $\frac{i+2}{i+1}$ este:

$$\frac{1+i}{2} \quad \frac{-1+i}{2} \quad \frac{2+i}{2} \quad \frac{2-i}{2} \quad \frac{3-i}{2}$$

11. Valoarea calculului $\frac{i+1}{2-i}$ este:

$$\frac{1+2i}{5} \quad \frac{1+i}{4} \quad \frac{1+3i}{5} \quad \frac{2+i}{3} \quad \frac{3+i}{2}$$

12. Valoarea calculului $\frac{1+2i}{1-i} + \frac{1-2i}{1+i}$ este:

$$\frac{1-2i}{2} \quad \frac{1+i}{2} \quad 0 \quad -1 \quad \frac{1-i}{2}$$

13. Valoarea calculului $\frac{1+i}{2-i} + \frac{1-i}{2+i}$ este:

$$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1+i}{5}$$

14. Valoarea calculului $(2 + 3i)^2$ este:

$$2 + 6i \quad 4 + 5i \quad -5 + 12i \quad -4 + i \quad 3 + 9i$$

15. Valoarea calculului $(2 + i)^3$ este:

$$2 + 6i \quad 1 + 5i \quad -2 + 12i \quad -4 + i \quad 2 + 11i$$

16. Valoarea calculului $(1 + i)^2 + (1 - i)^2$ este:

$$i \quad 0 \quad 1 \quad 1 + i \quad 2$$

17. Valoarea calculului $(1 + 2i)^2 + (2 + i)^2$ este:

$$2i \quad 4i \quad 6i \quad 8i \quad 10i$$

18. Valoarea calculului $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ este:

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

19. Fie $z_1 = 2 + i$ și $z_2 = 3 + 2i$. Calculați $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ și arătați că are valoarea:

$$2 + i \quad 4 + i \quad 5 + 2i \quad 4 + i \quad 5 - 3i$$

20. Fie $z_1 = 2 + i$ și $z_2 = 1 + i$. Calculați $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$ și arătați că are valoarea:

$$\frac{1+2i}{2} \quad \frac{2+i}{2} \quad 0 \quad -1 \quad \frac{3+i}{2}$$

21. Fie $z_1 = \sqrt{3} + i$ și $z_2 = \sqrt{5} + 2i$. Calculați $|z_1| + |z_2|$ și arătați că are valoarea:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

22. Fie $z_1 = 2 + i$ și $z_2 = 1 + 3i$. Calculați $|z_1 + z_2|$ și arătați că are valoarea:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
1. Mulțimi de numere	5	146
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	146
1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți.	5	146
1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv.		
Proprietăți ale radicalilor	8	147
1.1.3 Puteri cu exponent rațional. Aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale.		
Puteri cu exponent real	14	148
1.1.4 Noțiunea de logaritm. Proprietăți ale logaritmilor. Calcule cu logaritmi. Operația de logaritmare	18	149
1.2 Mulțimea numerelor complexe	23	151
1.2.1 Numere complexe sub formă algebrică. Conjugatul unui număr complex. Operații cu numere complexe	23	151
1.2.2 Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real	29	152
1.2.3 Rezolvarea de ecuații în C	33	152
1.3 Teste grilă de autoevaluare	36	153
Testul 1	36	153
Testul 2	37	154
2. Funcții și ecuații	38	155
2.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate. Funcții inversabile	38	155
2.2 Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinal 2 sau 3	44	157
2.3 Funcția exponențială. Ecuații exponențiale.	50	160
2.4 Funcția logaritmică. Ecuații logaritmice.	55	162
2.5 Funcții trigonometrice directe și inverse ...	60	164
2.5.1 Funcții trigonometrice directe	60	164
2.5.2 Funcții trigonometrice inverse	68	166
2.6 Teste grilă de autoevaluare	76	166

	Testul 1	76	166
	Testul 2	77	168
	Testul 3	78	169
3.	Metode de numărare	79	170
	3.1 Metoda inducției matematice	79	170
	3.2 Mulțimi finite ordonate	82	171
	3.3 Permutări	84	172
	3.4 Aranjamente	86	172
	3.5 Combinări	89	174
	3.6 Binomul lui Newton	91	175
	3.7 Teste grilă de autoevaluare	96	177
	Testul 1	96	177
	Testul 2	97	178
	Testul 3	98	179
4.	Matematici financiare	99	179
	4.1 Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA	99	179
	4.2 Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice. Interpretarea datelor statistice prin parametrii de poziție	108	181
	4.3 Elemente de probabilități	111	183
	4.3.1 Evenimente. Operații cu evenimente ..	111	183
	4.3.2 Probabilități. Proprietăți ale probabilităților	115	183
	4.3.3 Probabilități condiționate. Evenimente independente	118	184
	4.3.4 Schema lui Poisson. Schema lui Bernoulli	121	185
	4.3.5 Variabile aleatoare	123	186
	4.4 Teste grilă de autoevaluare	127	187
	Testul 1	127	187
	Testul 2	128	188
5.	Geometrie	129	189
	5.1 Reper cartezian în plan. Coordonate carteziene în plan. Distanța dintre două puncte în plan. ..	129	189
	5.2 Coordonatele unui vector. Coordonatele sumei vectoriale. Coordonatele produsului dintre un vector și un număr real. ..	132	189
	5.3 Ecuații ale dreptei în plan. Coliniaritate, ..		

concurență	135	190
5.4 Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan. Calcul de distanțe și arii	139	191
5.5 Teste grilă de autoevaluare	144	193
Testul 1	144	193
Testul 2	145	194

...