

## 2.4 Asimptotele funcțiilor reale

### a) Noțiuni teoretice și exemple

#### 1. Asimptote orizontale

**Definiție.** Dreapta  $y = a$  se numește **asimptotă orizontală** spre  $+\infty$  a funcției  $f$ , dacă  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ .

**Definiție.** Dreapta  $y = a$  se numește **asimptotă orizontală** spre  $-\infty$  a funcției  $f$ , dacă  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ .

**Exemplu.** Fie funcția  $f: \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+1}{x}$ .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow y = 1$  este asimptotă orizontală la ramurile spre  $\pm\infty$ .

#### 2. Asimptote verticale

**Definiție.** Dreapta  $x = x_0$  se numește **asimptotă verticală** a funcției  $f$ , dacă există și este infinită cel puțin una din limitele:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \text{ sau } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

–Dacă  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$  sau  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$ , atunci dreapta  $x = x_0$  se numește asimptotă verticală la stânga.

–Dacă  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$  sau  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$ , atunci dreapta  $x = x_0$  se numește asimptotă verticală la dreapta.

–Dacă ambele limite laterale ale funcției  $f$  sunt infinite, atunci dreapta  $x = x_0$  se numește asimptotă verticală.

**Exemplu.** Fie funcția  $f: \mathbf{R} - \{1\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+4}{x-1}$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+4}{x-1} = \frac{5}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x+4}{x-1} = \frac{5}{+0} = +\infty$$

și atunci rezultă că  $x = 1$  este asimptotă verticală la ramurile spre  $\pm\infty$ .

### 3. Asimptote oblice

**Definiție.** Dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$  (respectiv  $-\infty$ ) a funcției  $f$  dacă:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - mx - n| = 0 \text{ (respectiv } \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) - mx - n| = 0).$$

**Teoremă.** Fie  $f: D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ .

a) Dacă există  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbf{R}$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n \in \mathbf{R}$ , atunci dreapta  $y = mx + n$  este asimptota oblică a funcției  $f$  la ramura spre  $+\infty$ .

b) Dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbf{R}$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = n \in \mathbf{R}$  atunci dreapta  $y = mx + n$  este asimptota oblică a funcției  $f$  la ramura spre  $-\infty$ .

**Exemplu.** Fie funcția  $f: \mathbf{R} - \{1\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + x - 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = 2.$$

Atunci dreapta  $y = x + 2$  reprezintă asimptota oblică a funcției  $f$  la ramurile spre  $\pm\infty$ .

**Observație.** Dacă graficul unei funcții admite asimptotă orizontală la  $+\infty$  sau la  $-\infty$ , atunci nu mai poate admite asimptotă oblică la ramura spre  $+\infty$  sau  $-\infty$ .

## b) Probleme rezolvate

1. Determinați asimptota orizontală a funcției:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+2}.$$

**Soluție.** Calculăm:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ este asimptotă ori } - \text{ zontală la ramurile spre } \pm\infty.$$

2. Determinați asimptotele verticale ale funcției:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

**Soluție.** Calculăm:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{-0} = -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{+0} = +\infty.$$

Deci funcția  $f$  are asimptota verticală  $x = 2$  spre  $\pm\infty$ .

3. Determinați asimptotele oblice ale funcției:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}.$$

**Soluție.** Calculăm:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x} = 1.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^2 + x + 1}{x-1} - x \right] = \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2.$$

Rezultă că asimptota verticală la ramurile spre  $\pm\infty$  este  $y = x + 2$ .

4. Determinați parametrii reali  $a, b$  astfel încât graficul funcției

$f: \mathbf{R} - \{2\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x+2}$  să admită asimptota  $y = 2x + 1$ .

**Soluție.** Se impune:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 1}{x(x+2)} = 2 \Rightarrow a = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 2x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + bx + 1}{x+2} - 2x \right] = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + bx + 1 - 2x^2 - 4x}{x+2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-4)x + 1}{x+2} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow b - 4 = 1 \Rightarrow b = 5.$$

### c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Asimptota orizontală la  $\pm\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{2x+1}{x}$  este:

$$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2 \quad y = 3 \quad y = 4$$

2. Asimptota orizontală la  $\pm\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$  este:

$$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2 \quad y = 3 \quad y = 4$$

3. Asimptota verticală la  $\pm\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{x-1}{x}$  este:

$$x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$$

4. Asimptota verticală la  $\pm\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  este:

$$x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$$

5. Asimptota oblică la  $\pm\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x+1}$  este:

$$y = x - 2 \quad y = x - 1 \quad y = x \quad y = x + 1 \quad y = x + 2$$

6. Asimptota oblică la  $\pm\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-2}$  este:

$$y = x \quad y = x + 1 \quad y = x + 2 \quad y = x + 3 \quad y = x + 4$$

7. Determinați toate asimptotele graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$ . Numărul lor este egal cu:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

8. Determinați toate asimptotele graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ . Numărul lor este egal cu:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

## 2.5 Teste grilă de autoevaluare

### Testul 1

#### ■ Se acordă 1p din oficiu

(1) Arătați că 5 este majorant pentru mulțimea:

$$(-\infty, 7) \quad [6, +\infty) \quad (6, +\infty) \quad (-\infty, 1] \quad [-1, 9]$$

(1) 2. Valoarea limitei la dreapta:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$  este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

(1) 3. Asimptota orizontală la  $\pm\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$  este:

$$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2 \quad y = 3 \quad y = 4$$

(1) 4. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{2x^2 + x + 3}$  este:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad +\infty$$

(1) 5. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x}$  este:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad +\infty$$

(1) 6. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x}{e^x - x}$  este:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad +\infty$$

(1) 7. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$  este:

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad 2$$

(1) 8. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 4x - \cos 4x}{x}$  este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

(1) 9. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$  este:

$$0 \quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3} \quad 2$$

## Testul 2

### ■ Se acordă 1p din oficiu

(1) 1. Se consideră mulțimea  $A = (1, 9]$ . Calculați mulțimea majoranților și arătați că este egală cu:

$$(-\infty, 1) \quad [9, +\infty) \quad (9, +\infty) \quad (-\infty, 2] \quad [1, 9]$$

(1) 2. Valoarea limitei funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$  în

punctul 2 este:                    3                    4                    5                    6                    7

(1) 3. Determinați toate asimptotele graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ . Numărul lor este egal cu:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

(1) 4. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$  este:

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

(1) 5. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2}$  este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

(1) 6. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x^2}$  este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

(1) 7. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+\ln x}{x-\ln x}$  este:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad +\infty$$

(1) 8. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}+x}{e^x-x}$  este:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad +\infty$$

(1) 9. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x}{2x^3+x+3}$  este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad +\infty$$

### Testul 3

#### ■ Se acordă 1p din oficiu

(1) 1. Arătați că mulțimea  $A = [0, +\infty)$  are un minorant, calculați  $\inf A = \min A$  și valoarea lor este egală cu:

0      1      2      3      4

(1) 2. Valoarea limitei la dreapta  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-2)(x-3)$  este:

0      1      2      3      4

(1) 3. Determinați toate asimptotele graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ . Numărul lor este egal cu:

0      1      2      3      4      5

(1) 4. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{2x+5}}{x-2}$  este:

0       $-\frac{1}{2}$        $\frac{1}{4}$        $-\frac{1}{6}$       2

(1) 5. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x+x^2}-3}{x}$  este:

0       $\frac{1}{2}$        $\frac{1}{4}$        $\frac{1}{6}$       2

(1) 6. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+x^2-x}{x^2+x+3}$  este:

1      2      3      4       $-\infty$

(1) 7. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^5+1}$  este:

0       $\frac{1}{2}$        $\frac{2}{3}$       1       $\frac{3}{5}$

(1) 8. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+x}{x^3+1}\right)^{x+1}$  este:

1       $e$        $e^2$        $e^3$        $e^4$

(1) 9. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x^3-x}$  este:

-2      -1      0      1      2



## Testul 4

### ■ Se acordă 1p din oficiu

(1) 1. Arătați că mulțimea  $A = (-\infty, 6]$  are un majorant, calculați sup  $A = \max A$  și valoarea lor este egală cu:

2      3      4      5      6

(1) 1. Valoarea limitei la dreapta a funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) =$

$$= \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ 2x - 1, & x > 3 \end{cases} \text{ în punctul 3 este:}$$

1      2      3      4      5

(1) 3. Asimptota oblică la  $\pm\infty$  a graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$

$$f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+x+1} \text{ este:}$$

$$y = x \quad y = x - 1 \quad y = x + 2 \quad y = x + 3 \quad y = x + 4$$

(1) 4. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} - x}$  este:

1      2      3      4       $+\infty$

(1) 5. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 3}{x}$  este:

0       $\frac{1}{2}$        $\frac{1}{4}$        $\frac{3}{4}$       2

(1) 6. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2 \cdot \sin x)}{x \cdot \sin x}$  este:

0      1      2      3      4

(1) 7. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 + x + 3}$  este:

1      2      3      4       $-\infty$

(1) 8. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln^2 x}{x^2}$  este:

-2      -1      0      1      2

(1) 9. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 4}$  este:

-2      -1      0      1      2

## Testul 5

### ■ Se acordă 1p din oficiu

(1) 1. Se consideră mulțimile:

a) (0, 2)    b) (1, 4)    a) (2, +∞)    a) (−∞, 0)    a) [1, 3)

Dintre acestea, vecinătăți ale lui 3 sunt:

**una      două      trei      patru      cinci**

(1) 2. Valoarea limitei la stânga  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^2 + x + 1) \cdot e^x$  este:

**0      1      2      3      4**

(1) 3. Determinați toate asimptotele graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$f(x) = \frac{x^4 + 3x + 1}{x^2 - 1}$ . Numărul lor este egal cu:

**0      1      2      3      4      5**

(1) 4. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x^3 + \ln x}$  este:

**0      1      2      3      4**

(1) 5. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{x-x}}$  este:

**−1      0      2      3      4**

(1) 6. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{x}}$  este:

**1      e      e<sup>2</sup>      e<sup>3</sup>      e<sup>4</sup>**

(1) 7. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x}}$  este:

**1      e      e<sup>2</sup>      e<sup>3</sup>      e<sup>4</sup>**

(1) 8. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 3}$  este:

**1      2      3      4      +∞**

(1) 9. Valoarea limitei:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x^2 + x - 2}$  este:

**0      1      2      3      4**



# CUPRINS

	<b>Enunțuri</b>	<b>Rezolvări</b>
<b>1. Elemente de calcul matriceal și sisteme de</b>		
ecuații liniare .....	5	148
<b>1.1 Matrice</b> .....	5	148
<b>1.2 Determinanți</b> .....	21	151
<b>1.2.1 Determinantul unei matrice pătratică de</b>		
<b>ordin cel mult 3, proprietăți</b> .....	21	151
<b>1.2.2 Aplicațiile determinanților în geometria</b>		
<b>plană: ecuația unei drepte determinată de două</b>		
<b>puncte distincte, aria unui triunghi și coliniari-</b>		
<b>tatea a trei puncte în plan</b> .....	30	154
<b>1.3 Sisteme de ecuații liniare</b> .....	34	155
<b>1.3.1 Matrice inversabile <math>M_n(C), n = 2,3</math>.</b>		
<b>Ecuatii matriceale</b> .....	34	155
<b>1.3.2 Sisteme liniare cu cel mult 3 necunos-</b>		
<b>cute. Forma matriceală a unui sistem. Metode de</b>		
<b>rezolvare a sistemelor liniare: metoda lui Cramer</b>		
<b>metoda lui Gauss</b> .....	39	157
<b>1.4 Teste grilă de autoevaluare</b> .....	46	159
Testul 1 .....	46	159
Testul 2 .....	47	160
Testul 3 .....	48	161
Testul 4 .....	49	161
Testul 5 .....	50	162
Testul 6 .....	51	163
<b>2. Limite de funcții</b> .....	52	164
<b>2.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de</b>		
<b>puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire,</b>		
<b>vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile <math>+\infty</math> și</b>		
<b><math>-\infty</math></b> .....	52	164
<b>2.2 Limita unei funcții într-un punct, limite</b>		
<b>laterale. Operații cu limite de funcții</b> .....	59	165
<b>2.3 Limitele funcțiilor elementare</b> .....	65	165

2.4	Asimptotele funcțiilor reale .....	80	170
2.5	Teste grilă de autoevaluare .....	85	171
	Testul 1 .....	85	171
	Testul 2 .....	86	172
	Testul 3 .....	87	173
	Testul 4 .....	88	174
	Testul 5 .....	89	175
3.	Funcții continue .....	90	176
3.1	Continuitatea unei funcții. Operații cu funcții continue .....	90	176
3.2	Proprietăți ale funcțiilor continue .....	99	179
3.3	Teste grilă de autoevaluare .....	103	181
	Testul 1 .....	103	181
	Testul 2 .....	104	181
4.	Funcții derivabile .....	105	182
4.1	Tangenta la o curbă. Derivata unei funcții într-un punct , funcții derivabile .....	105	182
4.2	Derivatele unor funcții uzuale. Operații cu funcții care admit derivată. Derivarea funcțiilor compuse .....	113	185
4.3	Regulile lui l'Hospital .....	123	186
4.4	Teste grilă de autoevaluare .....	128	188
	Testul 1 .....	128	188
	Testul 2 .....	129	190
	Testul 3 .....	130	190
5.	Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor .....	131	191
5.1	Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor .....	131	191
5.2	Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor .....	136	194
5.3	Reprezentarea grafică a funcțiilor .....	139	195
5.4	Teste grilă de autoevaluare .....	147	196
	Testul 1 .....	147	196