1.2.1 Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Determinantul de ordin 2 atașat matricei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este numărul $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

2. Determinantul de ordin 3 atașat matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

este numărul $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} +$
$+a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} -$
$-a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$.

Exemple. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 -$
$-2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$

3. Proprietăți ale determinanților

1) $\det(A) = \det({}^tA)$;

2) Dacă adunăm la elementele unei linii (coloane) a unei matrice pătratice elementele altei linii (coloane) înmulțite cu un număr dat, atunci determinantul matricei rezultate este egal cu determinantul matricei inițiale.

3) Dacă înmulțim elementele unei linii (coloane) a unei matrice pătratice cu un număr α se obține o matrice al cărui determinant este egal cu determinantul matricei inițiale înmulțit cu α.

4) Dacă elementele unei linii (coloane) ale unei matrice pătratice au un factor comun, acest factor comun se poate scoate în fața determinantului.

5) Dacă $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ și $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, (\forall) j \in \{1, 2 \cdots, n\}$

și i fixat, și dacă B și C sunt matricele obținute din A, înlocuind pe $a_{ij}, j \in \{1, 2 \cdots, n\}$ cu b_{ij} respectiv c_{ij}, atunci are loc relația: $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.

6) Dacă schimbăm într-o matrice pătratică două linii(coloane) între ele, obținem o matrice al cărui determinant este egal cu opusul determinantului matricei inițiale.

7) Dacă într-o matrice pătratică două linii(coloane) sunt egale sau proporționale, atunci determinantul matricei este egal cu 0.

4. Dezvoltarea unui determinant după o linie sau după o coloană

Definiție. Fiind dată matricea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ și d_n determinantul de ordin n asociat matricei A, numim **minorul** elementului a_{ij} și-l notăm cu M_{ij} determinantul obținut din d_n eliminând linia i și coloana j.

Notăm $d_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ și-l numim **complementul algebric** al elementului a_{ij}.

Particularizare

a) Pentru $n = 2$, folosind formula determinantului de ordinul 2 obținem $d_2 = a_{11}d_{11} + a_{12}d_{12}$, care reprezintă dezvoltarea determinantului d_2 după linia 1. Asemănător se obțin dezvoltările determinantului d_2 după linia 2 și după coloanele 1 și 2.

b) Pentru $n = 3$, folosind formula determinantului de 2rdinal 3 obținem $d_3 = a_{11}d_{11} + a_{12}d_{12} + a_{13}d_{13}$, care reprezintă dezvoltarea determinantului d_3 după linia 1. Asemănător se obțin dezvoltările determinantului d_3 după liniile 2 și 3, și după coloanele 1, 2 și 3.

Exemplu. Calculăm determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ folosind dezvoltarea după linia 2. Calculăm:

$d_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $d_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$,

$d_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$. Atunci:

$\Delta = a_{21}d_{21} + a_{22}d_{22} + a_{23}d_{23} = 2 \cdot 2 + 1(-7) + 1 \cdot 4 = 1.$

5. Regula lul Sarus pentru determinantul de ordin 3 constă în scrierea mai întâi a liniilor determinantului matricei A, apoi dedesubt se scrie prima linie și apoi a doua linie. Termenii cu plus în dezvoltarea determinantului sunt cei care se obțin prin înmulțirea elementelor în sensul săgeților în jos, iar cei cu minus sunt cei care se obțin prin înmulțirea elementelor în sensul săgeților în sus.

$$\det(A) = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \ \ a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ \ \ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \end{array} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} +$$

$$+a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}.$$

Exemplu. Pentru calculul determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ scriem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 3 -$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$$-4 \cdot 2 \cdot 5 = 0 + 0 + 6 - 0 - 0 - 40 = -34.$$

b) Probleme rezolvate

1. Calculați determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & a+b \\ b & a-b \end{vmatrix}$.

Soluție. a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = 30 - 8 = 22.$

b) $\begin{vmatrix} a & a+b \\ b & a-b \end{vmatrix} = a(a-b) - (a+b)b = a^2 - ab - ab - b^2 =$
$= a^2 - 2ab - b^2.$

2. Rezolvați ecuația $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{vmatrix} = 0.$

Soluție. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x+3) - (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - x^2 - x - 2x -$

$-2=0 \Rightarrow -2=0$, fals. Deci ecuația nu are soluții.

3. Dezvoltând după prima linie calculați determinantul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Soluție. $\Delta=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot(3-2)+2(-1)(12-1)+3(8-1)=$
$=-1-22+21=-2.$

4. Folosind proprietățile determinanților calculați determinantul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soluție. Prima coloană rămâne așa cum este. A doua coloană se obține scăzând din a doua coloană prima coloană înmulțită cu 2. A treia coloană se obține scăzând din a treia coloană prima coloană înmulțită cu 4. Atunci:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2-2\cdot 1 & 4-4\cdot 1 \\ 2 & 1-2\cdot 2 & 1-4\cdot 2 \\ 3 & 2-2\cdot 3 & 1-4\cdot 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -7 \\ 3 & -4 & -11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -4 & -11 \end{vmatrix}=$$
$$=(-3)(-11)-(-7)(-4)=33-28=5.$$

5. Rezolvați ecuația: $\begin{vmatrix} x+2 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+2 \end{vmatrix}=0.$

Soluție. La linia 1 se adună liniile 2 și 3, iar liniile 2 și 3 rămân așa cum sunt și obținem:

$$\begin{vmatrix} 3x+2 & 3x+2 & 3x+2 \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (3x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+2 \end{vmatrix}=0$$

În noul determinant coloana 1 rămâne așa cum este, din coloana 2 se scade coloana 1, din coloana 3 se scade coloana 1 și obținem:

$$(3x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ x & x+2-x & x-x \\ x & x-x & x+2-x \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (3x+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 2 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$
$$=0 \Rightarrow (3x+2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4(3x+2)=0 \Rightarrow 3x+2=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$

6. Demonstrați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}$ are loc egalitatea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Soluție. Coloana 1 rămâne neschimbată, din coloana 2 se scade coloana 1, iar din coloana 3 se scade coloana 1 și se obține:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

7. Fără a dezvolta determinantul demonstrează egalitatea:

$$\begin{vmatrix} a-b & a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ b-c & b_1-c_1 & b_2-c_2 \\ c-a & c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Soluție. La linia 1 se adună liniile 2 și 3, iar liniile 2 și 3 rămân neschimbate și obținem:

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & b_1-c_1 & b_2-c_2 \\ c-a & c_1-a_1 & b_2-c_2 \end{vmatrix} = 0$, deoarece elementele de pe linia 1 sunt: $a-b+n-c+c-a=0$; $a_1-b_1+b_1-c_1+c_1-a_1=0$ și $a_2-b_2+b_2-c_2+c_2-a_2=0$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ este:

20 **21** **22** **23** **24**

2. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$ este:

20 **21** **22** **23** **24**

3. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ este:

20 **21** **22** **23** **24**

4. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{5} & -1 \\ 7 & 1+\sqrt{5} \end{vmatrix}$ este:

2 **3** **4** **5** **6**

5. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$ este:

−3 **−2** **−1** **0** **1**

6. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 2^3 & 2^4 \\ 2^5 & 2^6 \end{vmatrix}$ este:

0 **1** **2** **4** **8**

7. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 3^3 & 3^4 \\ 3^2 & 3^4 \end{vmatrix}$ este:

1 400 **1450** **1 458** **1 500** **1 600**

8. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{-2}$ $\boldsymbol{-1}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a+1}$ $\boldsymbol{a+2}$

9. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a & a+4 \\ a+2 & a+5 \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{a-2}$ $\boldsymbol{a-1}$ $\boldsymbol{a+1}$ $\boldsymbol{-a-8}$ $\boldsymbol{a+5}$

10. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a & a \\ a-b & a \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{ab}$ $\boldsymbol{a+1}$ $\boldsymbol{a-b}$ $\boldsymbol{a+b}$

11. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a & a+b \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{ab}$ $\boldsymbol{a+b}$ $\boldsymbol{2ab}$ $\boldsymbol{a-b}$

12. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{a^2}$ $\boldsymbol{4ab}$ $\boldsymbol{a+b}$ $\boldsymbol{3ab}$ $\boldsymbol{a-b}$

13. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{-3}$ $\boldsymbol{-2}$ $\boldsymbol{-1}$ $\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{1}$

14. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{-23}$ $\boldsymbol{-24}$ $\boldsymbol{-25}$ $\boldsymbol{10}$ $\boldsymbol{15}$

15. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

16. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ este:

0 **1** **2** **3** **4**

17. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a-1}$ $\boldsymbol{1-a}$ $\boldsymbol{a-2}$ $\boldsymbol{2-a}$

18. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ este:

$\boldsymbol{a}$ $\quad$ $\boldsymbol{a-1}$ $\quad$ $\boldsymbol{-a}$ $\quad$ $\boldsymbol{a-2}$ $\quad$ $\boldsymbol{-2a}$

19. Valoarea lui $x \in$ **R**, astfel încât $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

20. Valoarea lui $x \in$ **R**, astfel încât $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$ este:

1 **2** **3** **4** **5**

21. Valoarea lui $x \in$ **R**, astfel încât $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ este:

0 **1** **2** **3** **4**

22. Arătați că pentru orice $x \in$ **R** valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ este egală cu:

−2 **−1** **0** **1** **2**

23. Rezolvați ecuația: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$. Arată că ecuația are 3 soluții a căror sumă este egală cu:

0 **1** **2** **3** **4**

24. Arătați că pentru orice $x \in$ **R** valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ este egală cu:

−2 **−1** **0** **1** **2**

25. Valoarea lui $x \in$ **R**, astfel încât $\begin{vmatrix} x & x & x \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ este:

0 **1** **2** **3** **4**

1.2.2 Aplicațiile determinanților în geometria plană: ecuația unei drepte determinată de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan

a) Noțiuni teoretice

1. Fiind date punctele $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$, atunci ecuația dreptei AB este dată de $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Fiind date punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ și $C(x_3, y_3)$ atunci aria triunghiului ABC este dată de $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ și $C(x_3, y_3)$ sunt coliniare dacă punctul $C(x_3, y_3)$ verifică ecuația dreptei AB, adică:

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Probleme rezolvate

1. Fiind date punctele $A(1,2), B(\ 0,3)$ scrieți ecuația dreptei *AB*.

Soluție. Ecuația dreptei *AB* este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1-x & 2-y & 0 \\ 0-x & 3-y & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & 2-y \\ -x & 3-y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1-x)(3-y) + x(2-y) = 0 \Rightarrow 3 - 3x - y + xy + 2x -$
$-xy = 0 \Rightarrow -x - y + 3 = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0.$

2. Fiind date punctele $A(1,0), B(\ 3,1), C(0,5)$, calculați aria triunghiului *ABC*.

Soluție. $A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 3 & 1 & 1-3 \\ 0 & 5 & 1-0 \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1+10) = \frac{11}{2}.$$

3. Arătați că punctele $A(3,4), B(7,8), C(6,7)$ sunt coliniare.

Soluție. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7-3 & 8-4 & 0 \\ 6-3 & 7-4 & 0 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, deoarece liniile 2 și 3 sunt identice.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Ecuația dreptei *AB* determinată de punctele $A(1,1), B(\ 0,2)$ este:

$$\boldsymbol{x+y+1=0} \qquad \boldsymbol{x+y-1=0} \qquad \boldsymbol{x+y-2=0}$$

2. Ecuația dreptei *AB* determinată de punctele $A(1,0), B(\ 0,5)$ este:

$$\boldsymbol{x+y+1=0} \qquad \boldsymbol{x+y-1=0} \qquad \boldsymbol{5x+y-5=0}$$

3. Ecuația dreptei *AB* determinată de punctele $A(1,1), B(\ 2,3)$ este:

$$\boldsymbol{x+y+1=0} \qquad \boldsymbol{2x-y-1=0} \qquad \boldsymbol{x+y-2=0}$$

4. Fiind date punctele $A(1,1), B(\ 4,1), C(2,4)$, calculați aria triunghiului *ABC* și arătați că are valoarea:

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{5}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{7}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{9}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{11}{2}}$$

5. Fiind date punctele $A(0,0), B(\ 5,0), C(0,5)$, calculați aria triunghiului *ABC* și arătați că are valoarea:

$$\boldsymbol{\frac{19}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{21}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{23}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{25}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

6. Fiind date punctele $A(2,0), B(\ 7,0), C(0,3)$, calculați aria triunghiului *ABC* și arătați că are valoarea:

$$\boldsymbol{\frac{11}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{13}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{15}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{17}{2}} \qquad \boldsymbol{\frac{19}{2}}$$

7. Arătați că punctele $A(1,1), B(8,a), C(15,9)$ sunt coliniare pentru valoarea lui *a* egală cu:

0 1 2 3 4 5

8. Arătați că punctele $A(0,-1), B(2,a), C(4,3)$ sunt coliniare pentru valoarea lui *a* egală cu:

0 1 2 3 4 5

CUPRINS