

## 1.2.3 Morfisme de inele si corpuri

### a) Noțiuni teoretice și exemple

#### 1. Morfisme de inele

**Definiție.** Fiind date inelele  $(\mathbf{A}, +, \cdot)$  și  $(\mathbf{A}', *, o)$ , se numește **morfism** de inele funcția  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ , care îndeplinește proprietățile:

- 1)  $f(x + y) = f(x) * f(y) \ (\forall)x, y \in \mathbf{A}$ ;
- 2)  $f(x \cdot y) = f(x) o f(y) \ (\forall)x, y \in \mathbf{A}$ ;
- 3)  $f(e.) = e_o$ , unde  $e.$  și  $e_o$  sunt elementele neutre în raport cu operațiile multiplicative din cele două inele.

**Definiție.** Fiind date inelele  $(\mathbf{A}, +, \cdot)$  și  $(\mathbf{A}', *, o)$ , se numește **izomorfism** de inele funcția  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ , care îndeplinește proprietățile:

- a)  $f$  este morfism de inele.
- b)  $f$  este bijectivă.

**Observație.** Un morfism de inele  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  se numește **endomorfism** al inelului  $\mathbf{A}$ , iar un izomorfism de inele  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  se numește **automorfism** al inelului  $\mathbf{A}$ .

#### 2. Morfisme și izomorfisme de corpuri

**Definiție.** Fiind date corpurile  $(\mathbf{K}, +, \cdot)$  și  $(\mathbf{K}', *, o)$ , se numește **morfism** de corpuri funcția  $f : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$ , care îndeplinește proprietățile:

- 1)  $f(x + y) = f(x) * f(y) \ (\forall)x, y \in \mathbf{K}$ ;
- 2)  $f(x \cdot y) = f(x) o f(y) \ (\forall)x, y \in \mathbf{K}$ ;
- 3)  $f(e.) = e_o$ , unde  $e.$  și  $e_o$  sunt elementele neutre în raport cu operațiile multiplicative din cele două corpuri.

**Definiție.** Fiind date corpurile  $(\mathbf{K}, +, \cdot)$  și  $(\mathbf{K}', *, o)$ , se numește **izomorfism** de corpuri funcția  $f : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$ , care îndeplinește proprietățile:

- a)  $f$  este morfism de inele.
- b)  $f$  este bijectivă.

## b) Probleme rezolvate

1. a) Arată că pe mulțimea  $\mathbf{A} = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$  adunarea și înmulțirea determină o structură de inel.

b) Arată că pe mulțimea  $\mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{Z} \right\}$  adunarea și înmulțirea determină o structură de inel.

c) Arată că inelele de la a) și b) sunt izomorfe.

**Soluție.** a) Cu ușurință se arată că  $(\mathbf{A}, +)$  este grup abelian cu elementul neutru 0.

Cu ușurință se arată că  $(\mathbf{A}, \cdot)$  este monoid cu elementul neutru 1.

Cu ușurință se arată că înmulțirea este distributivă față de adunare.

b) Se verifică cu ușurință că  $(\mathbf{M}, +)$  este grup abelian cu elementul neutru matricea  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Cu ușurință se arată că  $(\mathbf{M}, \cdot)$  este monoid cu elementul neutru 1.

Cu ușurință se arată că înmulțirea este distributivă față de adunare.

c) Se stabilește izomorfismul:

$$f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}, f(x + y\sqrt{7}) = \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix}.$$

Vom demonstra acum că:

$$\text{a) } f(x_1 + y_1\sqrt{7} + x_2 + y_2\sqrt{7}) = f(x_1 + y_1\sqrt{7}) + f(x_2 + y_2\sqrt{7}) \\ (\forall) x_1 + y_1\sqrt{7}, x_2 + y_2\sqrt{7} \in \mathbf{A}.$$

$$\text{Avem: } f(x_1 + y_1\sqrt{7} + x_2 + y_2\sqrt{7}) = f(x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\sqrt{7}) = \\ = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 7(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 7y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 7y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \\ = f(x_1 + y_1\sqrt{7}) + f(x_2 + y_2\sqrt{7}) \quad (\forall) x_1 + y_1\sqrt{7}, x_2 + y_2\sqrt{7} \in \mathbf{A}.$$

$$\text{b) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1\sqrt{7} \\ 7y_1 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + y_2\sqrt{7} \\ 7y_2 + x_2 \end{pmatrix}\right) = f(x_1 + y_1\sqrt{7})f(x_2 + y_2\sqrt{7}) \\ (\forall) x_1 + y_1\sqrt{7}, x_2 + y_2\sqrt{7} \in \mathbf{A}.$$

$$\text{Avem: } f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1\sqrt{7} \\ 7y_1 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + y_2\sqrt{7} \\ 7y_2 + x_2 \end{pmatrix}\right) = \\ = f\left(\begin{pmatrix} x_1x_2 + 7y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{7} \\ 7(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1x_2 + 7y_1y_2) \end{pmatrix}\right) = \\ = \begin{pmatrix} x_1x_2 + 7y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ 7(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 + 7y_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 7y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 7y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \\ = f(x_1 + y_1\sqrt{7})f(x_2 + y_2\sqrt{7}) \quad (\forall) x_1 + y_1\sqrt{7}, x_2 + y_2\sqrt{7} \in \mathbf{A}.$$

$$c) f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avem: } f(0) = f(0 + 0 \cdot \sqrt{7}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d)  $f$  este bijectivă.

Avem:  $f$  este injectivă deoarece  $f(x_1 + y_1\sqrt{7}) = f(x_2 + y_2\sqrt{7}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 7y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 7y_2 & x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ și } y_1 = y_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + y_1\sqrt{7} = x_2 + y_2\sqrt{7}.$$

$f$  este surjectivă, deoarece pentru orice  $\begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$ , există

$$X + Y\sqrt{7} \text{ astfel încât } f(X + Y\sqrt{7}) = \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X & Y \\ 7Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = x \text{ și } Y = y.$$

2. a) Arată că pe  $\mathbf{A} = (0, +\infty)$  legile de compoziție:  $x * y = xy$  și  $x \circ y = x^{\ln y}$  determină o structură de corp comutativ.

b) Arată că între corpul numerelor reale  $\mathbf{R}$  și corpul de la punctul a) există un izomorfism de forma

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{A}, f(x) = e^{ax}, a \in \mathbf{R}.$$

**Soluție.** a) Cu ușurință se arată că  $(\mathbf{A}, *)$  este grup abelian cu elementul neutru 1.

Cu ușurință se arată că  $(\mathbf{A}, \circ)$  este monoid cu elementul neutru  $e$ .

Cu ușurință se arată că orice  $x \in \mathbf{A}$  este inversabil cu inversul egal cu  $\frac{1}{e^{\ln x}}$ .

Cu ușurință se arată că legea  $\circ$  este distributivă față de legea  $*$  și atunci rezultă că  $(\mathbf{A}, *, \circ)$  este corp comutativ.

b) Știm că  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  este corp cu elementul neutru față de adunare 0 și elementul neutru față de înmulțire 1.

$$\text{Trebuie ca : } f(1) = e \Rightarrow e^a = e \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = e^x.$$

Evident  $f$  este bijectivă.

$$f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x) * f(y) \quad (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

$$f(xy) = e^{xy} \text{ și } f(x) \circ f(y) = e^x \circ e^y = (e^x)^{\ln e^y} = (e^x)^y = e^{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(xy) = f(x) \circ f(y) \quad (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

Deci  $f(x) = e^x$  este izomorfism de corpuri.

3. Arătați că pe  $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$  legile de compoziție:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

determină o structură de inel;

b) Arătați că pe  $\mathbf{Q}[\mathbf{i}] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$  adunarea și înmulțirea numerelor complexe determină o structură de inel.

c) Arătați că inelele de la punctele a) și b) sunt izomorfe.

**Soluție.** a) Cu ușurință se arată că  $(A, +)$  este grup abelian cu elementul neutru  $(0, 0)$  și simetricul lui  $(a, b)$  egal cu  $(-a, -b)$ . Cu ușurință se arată că  $(\mathbf{A}, \cdot)$  este monoid cu elementul neutru  $(1, 0)$ .

Vom arăta că înmulțirea este distributivă față de adunare, sau:

$$\begin{aligned} [(a, b) + (a', b')] \cdot (c, c') &= (a, b) \cdot (c, c') + (a', b') \cdot (c, c') \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a + a', b + b') \cdot (c, c') &= (ac - bc', ac' + bc) + \\ + (a'c - b'c', a'c' + b'c) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (c(a + a') - c'(b + b'), c'(a + a') + c(b + b')) &= \\ = (ac - bc' + a'c - b'c', ac' + bc + a'c' + b'c), &\text{ ceea ce este evident adevărat.} \end{aligned}$$

b) Folosind proprietățile numerelor complexe se arată că pe

$\mathbf{Q}[\mathbf{i}] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$  adunarea și înmulțirea numerelor complexe determină o structură de inel

c) Definim  $f: \mathbf{A} = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}[\mathbf{i}], f(x, y) = x + iy$  și arătăm că este izomorfism de inele.

$$\begin{aligned} f[(x, y) + (x', y')] &= f(x + x', y + y') = x + x' + i(y + y') = \\ = x + iy + x' + iy' &= f(x, y) + f(x', y'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[(x, y) \cdot (x', y')] &= f(xx' - yy', xy' + x'y) = xx' - yy' + \\ + i(xy' + x'y) &= x(x' + iy') + y(ix' - y') = x(x' + iy') + \\ + y(ix' + i^2y') &= x(x' + iy') + iy(x' + iy') = (x' + iy') \cdot \\ \cdot (x + iy) &= f(x, y) \cdot f(x', y') \quad (\forall)x, y, x', y' \in \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Evident  $f$  este bijectivă și atunci  $f$  definește un izomorfism de inele.

### c) Probleme propuse spre rezolvare

1. a) Arătați că pe  $\mathbf{Z}$  legile de compoziție:

$$x * y = x + y - 2; x \circ y = xy - 2x - 2y + 6;$$

determină o structură de inel comutativ;

b) Arătați că funcția  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = x + a, a \in \mathbf{R}$  realizează izomorfismul între inelul  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  și inelul de la punctul a) pentru valoarea lui  $a$  egală cu:

$$\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4}$$

2. a) Arătați că pe  $\mathbf{Z}$  legile de compoziție:

$$x * y = x + y + 1; x \circ y = xy + x + y;$$

determină o structură de inel comutativ;

b) Arătați că pe  $\mathbf{Z}$  legile de compoziție:

$$x \oplus y = x + y - 1; x \otimes y = xy - x - y + 2;$$

determină o structură de inel comutativ;

c) Arătați că între inelele de la a) și b) există un izomorfism de forma  $f(x) = ax + 2, a \in \mathbf{R}$  pentru valoarea lui  $a$  egală cu:

$$\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4}$$

3. a) Arătați că pe  $\mathbf{R}$  legile de compoziție:

$$x * y = x + y - 4; x \circ y = xy - 4x - 4y + 20;$$

determină o structură de corp comutativ;

b) Arătați că  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + a, a \in \mathbf{R}$  stabilește un izomorfism între corpul numerelor reale și corpul de la a) pentru valoarea lui  $a$  egală cu:

$$\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4}$$

4. a) Arătați că pe  $\mathbf{R}$  legile de compoziție:

$$x * y = x + y + 4; x \circ y = xy + 4x + 4y + 12;$$

determină o structură de corp comutativ;

b) Arătați că  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax - 4, a \in \mathbf{R}$  stabilește un izomorfism între corpul numerelor reale și corpul de la a) pentru valoarea lui  $a$  egală cu:

$$\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4}$$





# CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
<b>1. Elemente de algebră</b> .....	5	180
<b>1.1 Grupuri</b> .....	5	180
<b>1.1.1</b> Lege de compoziție internă (operație algebrică), tabla operației, parte stabilă .....	5	180
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	5	180
b) Probleme rezolvate .....	8	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	15	
<b>1.1.2</b> Grup, exemple de grupuri, grupuri de matrice, grupuri de permutări, $\mathbf{Z}_n$ .....	18	183
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	18	
b) Probleme rezolvate .....	18	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	27	
<b>1.1.3</b> Morfism și izomorfism de grupuri ..	29	185
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	29	
b) Probleme rezolvate .....	29	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	35	
<b>1.1.4</b> Subgrup. Grup finit. Ordinul unui element .....	37	186
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	37	
b) Probleme rezolvate .....	38	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	39	
<b>1.2 Inele și corpuri</b> .....	42	188
<b>1.2.1</b> Inele .....	42	188
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	42	
b) Probleme rezolvate .....	44	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	52	
<b>1.2.2</b> Corpuri .....	54	190
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	54	
b) Probleme rezolvate .....	54	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	59	
<b>1.2.3</b> Morfisme de inele și corpuri .....	61	193
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	61	
b) Probleme rezolvate .....	62	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	65	
<b>1.3</b> Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ( $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_p, p$ prim) .....	66	194



<b>1.3.1</b> Forma algebrică a unui polinom, operații ( adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar ). Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X - a$ , schema lui Horner. Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bezout, c.m.m.d.c și c.m.m.m.c a două olinoame . . . . .	66	194
a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . .	66	
b) Probleme rezolvate . . . . .	70	
c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . .	76	
<b>1.3.2</b> Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viete pentru polinoame de grad cel mult 4 . . . . .	79	197
a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . .	79	
b) Probleme rezolvate . . . . .	81	
c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . .	91	
<b>1.3.3</b> Rezolvarea ecuațiilor algebrice . . . . .	94	203
a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . .	94	
b) Probleme rezolvate . . . . .	95	
c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . .	97	
<b>1.4</b> Teste grilă de autoevaluare . . . . .	99	205
Testul 1 . . . . .	99	205
Testul 2 . . . . .	100	205
Testul 3 . . . . .	101	206
Testul 4 . . . . .	102	207
Testul 5 . . . . .	103	208
Testul 6 . . . . .	104	209
<b>2. Elemente de analiză matematică</b> . . . . .	105	210
<b>2.1</b> Primitive . . . . .	105	210
a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . .	105	
b) Probleme rezolvate . . . . .	105	
c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . .	111	210
<b>2.2</b> Integrala nedefinită . . . . .	113	
a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . .	113	
b) Probleme rezolvate . . . . .	115	
c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . .	118	
<b>2.3</b> Metoda de integrare prin părți . . . . .	121	212
a) Noțiuni teoretice și exemple . . . . .	121	
b) Probleme rezolvate . . . . .	121	
c) Probleme propuse spre rezolvare . . . . .	126	
<b>2.4</b> Metoda de integrare prin schimbare de variabilă . . . . .	128	213

a) Noțiuni teoretice și exemple .....	128	
b) Probleme rezolvate .....	129	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	133	
<b>2.5</b> Integrarea funcțiilor raționale .....	136	215
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	136	
b) Probleme rezolvate .....	139	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	142	
<b>2.6</b> Teste grilă de autoevaluare .....	144	216
Testul 1 .....	144	216
Testul 2 .....	145	217
<b>3. Integrala definită .....</b>	146	218
<b>3.1</b> Diviziuni ale unui interval $[a, b]$ . Sume Riemann. Definiția integrabilității unei funcții pe un interval $[a, b]$ . Formula lui Leibniz-Newton. Proprietăți ale integralei definite. Teorema de medie. Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue. ....	146	
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	146	
b) Probleme rezolvate .....	149	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	154	
<b>3.2</b> Metode de calcul pentru integrala definită ..	157	220
<b>3.2.1</b> Metoda de integrare prin părți .....	157	
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	157	
b) Probleme rezolvate .....	157	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	160	
<b>3.2.2</b> Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă .....	162	222
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	162	
b) Probleme rezolvate .....	162	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	164	
<b>3.3</b> Integrarea funcțiilor raționale .....	166	224
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	166	
b) Probleme rezolvate .....	166	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	168	
<b>3.4</b> Teste grilă de autoevaluare .....	170	226
Testul 1 .....	170	226
Testul 2 .....	171	228
Testul 3 .....	172	228
Testul 4 .....	173	230
<b>4. Aplicații ale integralei definite .....</b>	174	230

a) Noțiuni teoretice și exemple	.....	174
b) Probleme rezolvate	.....	175
c) Probleme propuse spre rezolvare	...	177