

## 1.2 Inele și corpuri

### 1.2.1 Inele

#### a) Noțiuni teoretice și exemple

##### 1) Definiția inelului

**Definiție.** O mulțime nevidă  $\mathbf{A}$  luată împreună cu două legi de compoziție una notată aditiv „+” și alta notată multiplicativ „ $\cdot$ ” se numește **inel** dacă:

a)  $(\mathbf{A}, +)$  este **grup abelian**;

b)  $(\mathbf{A}, \cdot)$  este **monoid**;

c) înmulțirea este **distributivă** față de adunare, adică:

$$x(y + z) = xy + xz, (y + z)x = yx + zx \quad (\forall)x, y, z \in \mathbf{A}.$$

Dacă în plus legea de compoziție notată multiplicativ este comutativă, atunci inelul se numește comutativ.

**Exemple.** a)  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ , adică mulțimea numerelor întregi împreună cu adunarea și înmulțirea determină o structură de inel. Elementul neutru față de adunare este 0, elementul neutru față de înmulțire este 1, orice  $x \in \mathbf{Z}$  are ca opus pe  $-x$ .

b)  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ , adică mulțimea numerelor reale împreună cu adunarea și înmulțirea determină o structură de inel. Elementul neutru față de adunare este 0, elementul neutru față de înmulțire este 1, orice  $x \in \mathbf{R}$  are ca opus pe  $-x$ .

c)  $(\mathbf{M}_n(\mathbf{R}), +, \cdot)$ ,  $n \geq 2$ , adică mulțimea matricelor de  $n$  linii și  $n$  coloane cu coeficienți în  $\mathbf{R}$  determină împreună cu adunarea și înmulțirea un inel necomutativ, având elementul neutru față de adunare matricea  $0_n$  și elementul neutru față de înmulțire matricea unitate  $I_n$ .

d)  $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ , adică mulțimea claselor de resturi modulo  $n$ , împreună cu adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo  $n$  determină o structură de inel. Elementul neutru față de adunare este  $\hat{0}$ , elementul neutru față de înmulțire este  $\hat{1}$ .

**Definiție.** Fie  $(\mathbf{A}, +, \cdot)$  un inel și  $a \in \mathbf{A}, a \neq 0$ . Spunem că  $a$  este divizor al lui 0 la stânga (respectiv la dreapta) dacă există  $b \in \mathbf{A}, b \neq 0$ , astfel încât  $ab = 0$  (respectiv  $ba = 0$ ).

Un element  $a \in \mathbf{A}$ , care este atât divizor la stânga cât și la dreapta al lui 0 se numește divizor al lui 0.

**Exemple.** Inelul  $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$  are divizori ai lui 0 deoarece  $\hat{2} \neq \hat{0}$   
 $\hat{3} \neq \hat{0}$  și  $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$ .

**Definiție.** Spunem că inelul  $(\mathbf{A}, +, \cdot)$  este fără divizori ai lui 0 dacă  
 $(\forall)x, y \in \mathbf{A}, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$ .

**Exemplu.** Inelul  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  nu are divizori ai lui 0 deoarece  
 $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$ .

## 2) Reguli de calcul într-un inel

1) Într-un inel  $(\mathbf{A}, +, \cdot)$  cu cel puțin două elemente avem:  $1 \neq 0$ .

2) Pentru orice  $x \in \mathbf{A}$ , avem:  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ .

3) Pentru orice  $x, y \in \mathbf{A}$ , avem:

$$(-x)(-y) = xy \text{ și}$$

$$(-x)y = x(-y) = -xy.$$

4) Pentru orice  $x, y, z \in \mathbf{A}$  avem:

$$x(y - z) = xy - xz \text{ și } (y - z)x = yx - zx.$$

5) Într-un inel  $(\mathbf{A}, +, \cdot)$  fără divizori ai lui 0, dacă  $x \neq 0$ , atunci:

$$xy = xz \Rightarrow y = z \text{ și } yx = zx \Rightarrow y = z.$$

## b) Probleme rezolvate

1. Arătați că  $(\mathbf{Z}, *, 0)$ , unde  $x * y = x + y - 3$ ;  $xoy = xy - 3x - 3y + 12$  determină o structură algebrică de inel comutativ.

**Soluție.** a) Arătăm că  $(\mathbf{Z}, *)$  este grup abelian.

$x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x (\forall)x, y \in \mathbf{Z}$ , deci legea  $*$  este comutativă.

$$(x * y) * z = (x + y - 3) * z = x + y - 3 + z - 3 = x + y + z - 6;$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + y + z - 3 - 3 = x + y + z - 6.$$

Atunci  $(x * y) * z = x * (y * z) (\forall)x, y, z \in \mathbf{Z}$  și deci  $*$  este asociativă.

Deoarece  $*$  este comutativă, determinăm elementul neutru  $e$  din egalitatea:  $x * e = x \Leftrightarrow x + e - 3 = x \Leftrightarrow e = 3$ .

Deoarece  $*$  este comutativă, pentru  $x \in \mathbf{Z}$  determinăm elementul simetric  $x'$  din egalitatea:  $x * x' = e \Leftrightarrow x + x' - 3 = 3 \Leftrightarrow x' = -x + 6 \in \mathbf{Z}$ .

Deci  $(\mathbf{Z}, *)$  este grup abelian.

b) Arătăm că  $(\mathbf{Z}, o)$  este monoid.

$$(xoy)oz = (xy - 3x - 3y + 12)oz = (xy - 3x - 3y + 12)z -$$

$$-3(xy - 3x - 3y + 12) - 3z + 12 = \dots = xyz - 3xy - 3yz - 3zx + 9x + 9y + 9z - 24.$$

$$xo(yoz) = xo(yz - 3y - 3z + 12) = x(yz - 3y - 3z + 12) - 3(yz - 3y - 3z + 12) - 3x + 12 = \dots = xyz - 3xy - 3yz - 3zx + 9x + 9y + 9z - 24.$$

Deci  $o$  este asociativă.

Deoarece  $o$  este comutativă ( se arată cu ușurință ), determinăm elementul neutru  $e$ , astfel încât  $xoe = x(\forall)x \in \mathbf{Z}$ .

$$xoe = x \Leftrightarrow xe - 3x - 3e + 12 = x \Leftrightarrow e(x - 3) = 4(x - 3) \Leftrightarrow e = 4.$$

c) Deoarece  $o$  este comutativă, arătăm că  $o$  este **distributivă** față de  $*$ , adică:

$$xo(y * z) = xoy * xoz(\forall)x, y, z \in \mathbf{Z}.$$

$$xo(y * z) = xo(y + z - 3) = x(y + z - 3) - 3x - 3(y + z - 3) + 12 = xy + xz - 6x - 3y - 3z + 21.$$

$$\begin{aligned} xoy * xoz &= (xy - 3x - 3y + 12) * (xz - 3x - 3z + 12) = \\ &= xy - 3x - 3y + 12 + xz - 3x - 3z + 12 - 3 = \\ &= xy + xz - 6x - 3y - 3z + 21. \end{aligned}$$

Deci legea  $o$  este **distributivă** față de legea  $*$

2. Fie mulțimea  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}$ . Arătați că mulțimea

$A$  are o structură algebrică de inel față de adunarea și înmulțirea matricelor. Studiați existența divizorilor lui zero.

**Soluție.** a) Arătăm că  $(A, +)$  este grup abelian.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b & 0 & a+b \end{pmatrix}, \text{ de unde rezultă}$$

că adunarea matricelor este comutativă.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b+c & 0 & b+c \\ 0 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b+c & 0 & a+b+c \end{pmatrix};$$

$$\left[ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b+c & 0 & a+b+c \end{pmatrix}, \text{ de unde rezultă că}$$

adunarea matricelor este asociativă.

Elementul neutru în raport cu adunarea este matricea  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Simetricele matricei  $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$  este matricea  $\begin{pmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ .

$$\text{b) } \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}, \text{ de unde rezultă că}$$

înmulțirea matricelor este comutativă.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 2bc & 0 & 2bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 2bc & 0 & 2bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4abc & 0 & 4abc \\ 0 & 0 & 0 \\ 4abc & 0 & 4abc \end{pmatrix}.$$

$$\left[ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4abc & 0 & 4abc \\ 0 & 0 & 0 \\ 4abc & 0 & 4abc \end{pmatrix}, \text{ de unde rezultă că înmulțirea}$$

matricelor este asociativă.

Deoarece înmulțirea este comutativă, determinăm elementul

$$\begin{aligned}
 & \text{neutru } \begin{pmatrix} e & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & e \end{pmatrix} \text{ astfel încât să avem: } \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & e \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2ae & 0 & 2ae \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ae & 0 & 2ae \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow 2ae = a \Rightarrow \\
 & \Rightarrow e = \frac{1}{2}. \text{ Elementul neutru este deci } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Se demonstrează cu ușurință că înmulțirea este distributivă față de adunare, adică:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} (\forall) a, b, c \in \mathbf{R}.
 \end{aligned}$$

Inelul nu are divizori ai lui zero deoarece:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a \neq 0; \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow b \neq 0. \text{ Atunci: } ab \neq 0 \text{ și } \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} ab & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ ab & 0 & ab \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ deoarece } ab \neq 0.
 \end{aligned}$$

**3.** Arătați că în orice inel comutativ  $(A, +, \cdot)$  sunt adevărate egalitățile:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ;
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ .

**Soluție.** Inelul fiind comutativ avem  $ab = ba$   $(\forall) a, b \in A$ .

- $(a - b)(a + b) = aa + ab - ba - bb = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$ .
- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + \\ &+ ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + \\ &+ bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \end{aligned}$$

4. Demonstrați că în inelul  $\mathbf{Z}_2$  sunt adevărate egalitățile:

$$\text{a) } (a + b)^2 = a + b;$$

$$\text{b) } (a + b)^3 = a + b;$$

$$\text{c) } (a + b)^4 = a + b.$$

**Soluție.** a)  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + ab + ba + b^2.$

Din tabla înmulțirii și tabla adunării avem:  $a^2 = a, b^2 = b$  și  $ab + ba = 0$ . Atunci rezultă  $(a + b)^2 = a + b$ .

$$\text{b) } (a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a + b.$$

$$\text{c) } (a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a + b.$$

5. Demonstrați că în inelul  $\mathbf{Z}_3$  sunt adevărate egalitățile:

$$\text{a) } (a + b)^2 = a^2 - ab + b^2;$$

$$\text{b) } (a + b)^3 = a + b.$$

**Soluție.** a)  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + ab + ba + b^2$ . Însă  $ab + ba = ab + ab = ab + ab + ab - ab = 0 - ab = -ab$ . Atunci  $(a + b)^2 = a^2 - ab + b^2$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = (a^2 - ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + a^2b - aba - abb + b^2a + b^3 = a^3 + b^3 = a + b, \text{ deoarece} \\ &\text{înmulțirea în } \mathbf{Z}_3 \text{ este comutativă ( } a^2b - aba = a^2b - aab = 0 \text{ și } \\ &-abb + b^2a = -bab + b^2a = -bba + b^2a = 0 \text{ ) și } a^3 = a; b^3 = \\ &= b \text{ ( } \hat{0}^3 = \hat{0}; \hat{1}^3 = \hat{1}; \hat{2}^3 = \hat{2} \text{ )}. \end{aligned}$$

6. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_2$  ecuațiile:

$$\text{a) } x^2 + \hat{1} = \hat{0}$$

$$\text{b) } x^3 + x = \hat{0}.$$

**Soluție.**  $\mathbf{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$ . Vom verifica pe rând dacă  $\hat{0}, \hat{1}$  sunt soluții.

$$\text{a) } \hat{0}^2 + \hat{1} = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1} \neq \hat{0}, \text{ deci } \hat{0} \text{ nu este soluție a ecuației.}$$

$$\hat{1}^2 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{0}, \text{ deci } \hat{1} \text{ este soluție a ecuației.}$$

$$\text{b) } \hat{0}^3 + \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}, \text{ deci } \hat{0} \text{ este soluție a ecuației.}$$

$\hat{1}^3 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$ , deci  $\hat{1}$  este soluție a ecuației.

7. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_4$  ecuațiile:

a)  $x^2 + x + \hat{2} = \hat{0}$

b)  $x^3 + \hat{1} = \hat{0}$ .

**Soluție.**  $\mathbf{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ . Vom verifica pe rând dacă  $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$  sunt soluții.

a)  $\hat{0}^2 + \hat{0} + \hat{2} = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2} \neq \hat{0}$ , deci  $\hat{0}$  nu este soluție a ecuației.

$\hat{1}^2 + \hat{1} + \hat{2} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$ , deci  $\hat{1}$  este soluție a ecuației.

$\hat{2}^2 + \hat{2} + \hat{2} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$ , deci  $\hat{2}$  este soluție a ecuației.

$\hat{3}^2 + \hat{3} + \hat{2} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \neq \hat{0}$ , deci  $\hat{3}$  nu este soluție a ecuației.

b)  $\hat{0}^3 + \hat{1} = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1} \neq \hat{0}$ , deci  $\hat{0}$  nu este soluție a ecuației.

$\hat{1}^3 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \neq \hat{0}$ , deci  $\hat{1}$  nu este soluție a ecuației.

$\hat{2}^3 + \hat{1} = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1} \neq \hat{0}$ , deci  $\hat{2}$  nu este soluție a ecuației.

$\hat{3}^3 + \hat{1} = \hat{3} + \hat{1} = \hat{0}$ , deci  $\hat{3}$  este soluție a ecuației.

8. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_4$  sistemul

a) 
$$\begin{cases} x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + y = \hat{1} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + y = \hat{0} \\ \hat{2}x + y = \hat{1} \end{cases}$$

**Soluție.** Tabla înmulțirii în  $\mathbf{Z}_4$  este:

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

a) Se înmulțește a doua ecuație cu 2, se adună cu prima și se obține:

$\hat{3}x + \hat{0} = \hat{1} + \hat{2} \Rightarrow \hat{3}x = \hat{3} \Rightarrow x = \hat{1}$ . Înlocuind în a doua ecuație se obține  $\hat{3} + y = \hat{1} \Rightarrow \hat{3} + \hat{1} + y = \hat{1} + \hat{1} \Rightarrow y = \hat{2}$ .

b) Se înmulțește a doua ecuație cu  $\hat{2}$  și se obține  $\hat{2}y = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{1}$  sau  $y = \hat{3}$ . Înlocuind în prima ecuație obținem:

pentru  $y = \hat{1} \Rightarrow x + \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow x = \hat{3}$ .

pentru  $y = \hat{3} \Rightarrow x + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow x = \hat{1}$ .

### c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Arătați că  $(\mathbf{R}, *, o)$ , unde  $x * y = x + y + 2$ ;  $xoy = 2xy + 4x + 4y + 6$  determină o structură algebrică de inel comutativ.

Elementul neutru în raport cu  $o$  este egal cu:

$$-\frac{5}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$$

2. Arătați că  $(\mathbf{R}, *, o)$ , unde  $x * y = x + y - 1$ ;  $xoy = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$  determină o structură algebrică de inel comutativ.

Elementul neutru în raport cu  $o$  este egal cu:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

3. Fiind dată mulțimea  $A = \{x + y\sqrt{5} | x, y \in \mathbf{Z}\}$ , adunarea  $+$  și înmulțirea  $\cdot$  numerelor reale arătați că  $(A, +, \cdot)$  determină o structură algebrică de inel.

Elementul neutru în raport cu înmulțirea este:

$$0 \quad 1 \quad 1 + \sqrt{5} \quad 1 - \sqrt{5} \quad 2$$

4. Fiind dată mulțimea  $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{Z} \right\}$ , adunarea  $+$  și

înmulțirea  $\cdot$  matricelor, arătați că  $(A, +, \cdot)$  determină o structură algebrică de inel.

Elementul neutru în raport cu înmulțirea este:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Fiind dat inelul comutativ  $(A, +, \cdot)$  și  $a, b \in A$  expresia  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$  este egală cu:

$$a - b \quad a + b \quad a^2 - b^2 \quad a^2 + b^2 \quad a^3 - b^3$$

6. Fiind dat inelul comutativ  $(A, +, \cdot)$  și  $a, b \in A$  expresia  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  este egală cu:

$$a - b \quad a + b \quad (a + b)^2 \quad (a + b)^3 \quad (a - b)^3$$



7. Fiind dat inelul  $\mathbf{Z}_3$  și  $a, b \in \mathbf{Z}_3$ , calculați  $a^3 + b^3$  și arătați că are valoarea egală cu:

$$a \quad b \quad a + b \quad a^2 + b^2 \quad a - b$$

8. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_2$  ecuația  $x^3 + x^2 + x + \hat{1} = \hat{0}$ . Soluțiile sunt:

$$\hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{0} \text{ și } \hat{1}$$

9. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_3$  ecuația  $x^3 + x = \hat{0}$ . Soluțiile sunt:

$$\hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{2} \quad \hat{0} \text{ și } \hat{1} \quad \hat{0} \text{ și } \hat{2}$$

10. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_4$  ecuația  $x^3 + x + \hat{2} = \hat{0}$ . Soluțiile sunt:

$$\hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{2} \quad \hat{3} \quad \hat{1}, \hat{2} \text{ și } \hat{3}$$

11. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_6$  ecuația  $x^3 + x + \hat{2} = \hat{0}$ . Soluțiile sunt:

$$\hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{2} \quad \hat{3} \quad \hat{4}$$

12. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_4$  sistemul  $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + y = \hat{0} \end{cases}$ . Soluția lui este:

$$\hat{0} \text{ și } \hat{1} \quad \hat{0} \text{ și } \hat{2} \quad \hat{2} \text{ și } \hat{0} \quad \hat{1} \text{ și } \hat{1} \quad \hat{1} \text{ și } \hat{2}$$

13. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_4$  sistemul  $\begin{cases} x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{2}x + y = \hat{3} \end{cases}$ . Soluția lui este:

$$\hat{0} \text{ și } \hat{1} \quad \hat{0} \text{ și } \hat{2} \quad \hat{2} \text{ și } \hat{0} \quad \hat{3} \text{ și } \hat{1} \quad \hat{1} \text{ și } \hat{3}$$

14. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_4$  sistemul  $\begin{cases} x + y = \hat{3} \\ \hat{3}x + y = \hat{3} \end{cases}$ . Ecuația are un număr

de soluții egal cu:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

15. Rezolvați în  $\mathbf{Z}_4$  sistemul  $\begin{cases} x + y + z = \hat{2} \\ \hat{2}x + y + z = \hat{3} \\ x + \hat{2}y + z = \hat{0} \end{cases}$ . Soluția lui este:

$$\hat{0}, \hat{2}; \hat{3} \quad \hat{1}, \hat{2}; \hat{0} \quad \hat{1}, \hat{2}; \hat{3} \quad \hat{1}, \hat{0}; \hat{3} \quad \hat{1}, \hat{2}; \hat{0}$$

# CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
<b>1. Elemente de algebră</b> .....	5	141
<b>1.1 Grupuri</b> .....	5	141
<b>1.1.1</b> Lege de compoziție internă (operație algebrică), tabla operației, parte stabilă .....	5	141
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	5	
b) Probleme rezolvate .....	8	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	14	
<b>1.1.2</b> Grup, exemple de grupuri, grupuri de matrice, grupuri de permutări, $\mathbf{Z}_n$ .....	17	144
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	17	
b) Probleme rezolvate .....	17	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	23	
<b>1.1.3</b> Morfism și izomorfism de grupuri ..	25	146
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	25	
b) Probleme rezolvate .....	25	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	31	
<b>1.2</b> Inele și corpuri .....	33	147
<b>1.2.1</b> Inele .....	33	147
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	33	
b) Probleme rezolvate .....	34	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	40	
<b>1.2.2</b> Corpuri .....	42	150
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	42	
b) Probleme rezolvate .....	42	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	47	
<b>1.3</b> Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ( $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_p, p$ prim ) .....	49	153
<b>1.3.1</b> Forma algebrică a unui polinom, operații ( adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar ). Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X - a$ , schema lui Horner. Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bezout, c.m.m.d.c și c.m.m.m.c a două polinoame .....	49	153
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	49	

b) Probleme rezolvate .....	53	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	59	
<b>1.3.2 Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viete pentru polinoame de grad cel mult 4 .....</b>	62	156
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	62	
b) Probleme rezolvate .....	64	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	74	
<b>1.3.3 Rezolvarea ecuațiilor algebrice .....</b>	77	162
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	77	
b) Probleme rezolvate .....	78	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	80	
<b>1.4 Teste grilă de autoevaluare .....</b>	82	163
Testul 1 .....	82	163
Testul 2 .....	83	164
Testul 3 .....	84	165
Testul 4 .....	85	166
<b>2. Elemente de analiză matematică .....</b>	86	167
<b>2.1 Primitive .....</b>	86	167
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	86	
b) Probleme rezolvate .....	86	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	89	
<b>2.2 Integrala nedefinită .....</b>	91	168
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	91	
b) Probleme rezolvate .....	93	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	96	
<b>2.3 Metoda de integrare prin părți .....</b>	99	169
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	99	
b) Probleme rezolvate .....	99	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	101	
<b>2.4 Metoda de integrare prin schimbare de variabilă .....</b>	103	171
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	103	
b) Probleme rezolvate .....	104	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	106	
<b>2.5 Integrarea funcțiilor raționale .....</b>	109	172
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	109	
b) Probleme rezolvate .....	112	
c) Probleme propuse spre rezolvare .....	115	
<b>2.6 Teste grilă de autoevaluare .....</b>	117	174
Testul 1 .....	117	174

	Testul 2 .....	118	174
<b>3.</b>	<b>Integrala definită</b> .....	119	175
	<b>3.1</b> Formula lui Leibniz-Newton. Proprietăți ale integralei definite .....	119	175
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	119	
	b) Probleme rezolvate .....	120	
	c) Probleme propuse spre rezolvare ...	123	
	<b>3.2</b> Metode de calcul pentru integrala definită ..	125	177
	<b>3.2.1</b> Metoda de integrare prin părți .....	125	177
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	125	
	b) Probleme rezolvate .....	125	
	c) Probleme propuse spre rezolvare ....	126	
	<b>3.2.2</b> Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă .....	128	179
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	128	
	b) Probleme rezolvate .....	128	
	c) Probleme propuse spre rezolvare ....	129	
	<b>3.3</b> Integrarea funcțiilor raționale .....	131	181
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	131	
	b) Probleme rezolvate .....	131	
	c) Probleme propuse spre rezolvare ...	133	
	<b>3.4</b> Teste grilă de autoevaluare .....	135	183
	Testul 1 .....	135	183
	Testul 2 .....	136	184
<b>4.</b>	<b>Aplicații ale integralei definite</b> .....	137	185
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	137	
	b) Probleme rezolvate .....	137	
	c) Probleme propuse spre rezolvare ...	139	