1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

a) Noțiuni teoretice și exemple

Axioma lui Arhimede. Pentru orice număr real x, există și este unic numărul întreg n astfel încât $x \in [n, n+1)$.

1. Fiind dat numărul real x, numim **partea întreagă** a lui x și o notăm cu $[x]$, cel mai mare număr întreg, care este mai mic sau egal cu x.

2. Fiind dat numărul real x, numim **partea fracționară** a lui x și o notăm cu $\{x\}$, diferența dintre numărul x și partea întreagă a lui x ($\{x\} = x - [x]$).

Exemple. a) $[1{,}7] = [1 + 0{,}7] = 1$; $[-2{,}3] = [-3 + 0{,}7] - 3$; b) $\{5{,}2\} = 5{,}2 - [5{,}2] = 5{,}2 - 5 = 0{,}2$,
$\{-3{,}1\} = -3{,}1 - [-3{,}1] = -3{,}1 - (-4) = 0{,}9$.

b) Probleme rezolvate

1. Calculați:

a) $\left[\sqrt{3}\right]$ b) $\left[\sqrt{3+\sqrt{3}}\right]$ c) $\left\{\sqrt{2+\sqrt{3}}\right\}$.

Soluție. a) $1 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \left[\sqrt{3}\right] = 1$.

b) $\sqrt{3+\sqrt{3}} < \sqrt{3+\sqrt{4}} = \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ și $\sqrt{3+\sqrt{3}} > \sqrt{3+1} = 2$ și atunci $\left[\sqrt{3+\sqrt{3}}\right] = 2$.

c) $\left\{\sqrt{2+\sqrt{3}}\right\} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \left[\sqrt{2+\sqrt{3}}\right] = \sqrt{2+\sqrt{3}} - 1$

2. Calculați: $\left[\sqrt{n(n+1)}\right]$ și $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$.

Soluție. Se arată că:

$$n \le \sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = n.$$

$$\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\} = \sqrt{n(n+1)} - \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = \sqrt{n(n+1)} - n.$$

3. Fie $x, y \in \mathbf{R}$. Demonstrați că:

$$\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$

Soluție: $x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\} \Rightarrow x - y =$
$= [x] - [y] + \{x\} - \{y\}$. Evident: $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$.

4. Demonstrați că $(\forall)x \in \mathbf{R}$ şi $(\forall)k \in \mathbf{Z}$:

a) $[x+k]=[x]+k$; b) $\{x+k\}=\{x\}$.

Soluție. a) $[x]\le x<[x]+1 \Rightarrow [x]+k \le x+k<[x]+k+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [x+k]=[x]+k.$

b) $\{x+k\}=x+k-[x+k]=x+k-[x]-k=x-[x]=\{x\}$.

5. Fie $x, y \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$. Să se demonstreze că:

$$\{x\}+\{y\}=1 \Leftrightarrow x+y \in \mathbf{Z}.$$

Soluție. Fie $x, y \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ astfel încât $x+y \in \mathbf{Z}$. Atunci:

$x+y=[x]+[y]+\{x\}+\{y\} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \{x\}+\{y\} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{x\}+\{y\}=1$, deoarece $\{x\},\{y\} \in (0,1)$.

6. Rezolvați ecuaţia $[x]=\dfrac{x+1}{2}$.

Soluție. Avem $\dfrac{x+1}{2} \in \mathbf{Z}$ şi $[x]\le x<[x]+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x+1}{2} \in \mathbf{Z}$ şi $\dfrac{x+1}{2} \le x < \dfrac{x+1}{2}+1 \Rightarrow \dfrac{x+1}{2} \in \mathbf{Z}$

şi $x \in [1, 3) \Rightarrow x = 1$.

7. Rezolvați ecuaţia $\{x\}=x+1$.

Soluție. $\{x\}=x+1 \Rightarrow \{x\}=\{x\}+[x]+1 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in [-1, 0)$.

8. Rezolvați ecuaţia $x+\{x\}=[x]+1$.

Soluție. $x=\{x\}+[x]$ şi înlocuind în ecuație obţinem $\{x\}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = k+\dfrac{1}{2}$, unde $k \in Z$.

9. Rezolvați ecuaţia $\{x\}=[x]$.

Soluție. $\{x\}=[x] \in \mathbf{Z} \Rightarrow \{x\} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \{x\}=0 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=0$.

10. Rezolvați inecuaţia $[x-1]\le 2$.

Soluție. Avem: $x-1<[x-1]+1\le 2+1=3\Rightarrow$
$\Rightarrow x-1<3\Rightarrow x<4$.

11. Rezolvați ecuaţia $\left[\frac{x+1}{3}\right]=x-2$.

Soluție. Avem: $x-2=\left[\frac{x+1}{3}\right]\in \mathbf{Z}\Rightarrow x-2\in\mathbf{Z}\Rightarrow x\in\mathbf{Z}.$

Avem de asemenea:

$$\left[\frac{x+1}{3}\right]\le\frac{x+1}{3}<\left[\frac{x+1}{3}\right]+1\Rightarrow x-2\le\frac{x+1}{3}<x-2+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-2\le\frac{x+1}{3}<x-1\Rightarrow 3x-6\le x+1<3x-3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x\le 7 \text{ şi } 2x>4\Rightarrow\cdots\Rightarrow x\in\left(2,\frac{7}{2}\right].$$

Cum $x\in\mathbf{Z}$ rezultă $x = 3$.

12. Rezolvați ecuaţia $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\left[\frac{x+1}{3}\right]$.

Soluție. Notăm: $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\left[\frac{x+1}{3}\right]=k$. Atunci avem:

$$k\le\frac{x-1}{2}<k+1,\ k\le\frac{x+1}{3}<k+1\Rightarrow 2k+1\le x<2k+3$$

şi $3k-1\le x<3k+2\Rightarrow -2k-3<-x\le -2k-1$ şi $3k-1\le x<$
$<3k+2$ şi adunând membru cu membru obţinem:

$k-4<0<k+1\Rightarrow -1<k<4$ şi cum $k\in\mathbf{Z}$ rezultă: $k\in\{0,1,2,3\}$.

1) Dacă k = 0 atunci: $\left[\frac{x-1}{2}\right]=0,\left[\frac{x+1}{3}\right]=0\Rightarrow x\in[1,2)$

2) Dacă k = 1 atunci: $\left[\frac{x-1}{2}\right]=1,\left[\frac{x+1}{3}\right]=1\Rightarrow x\in[3,5)$

3) Dacă k = 2 atunci: $\left[\frac{x-1}{2}\right]=2,\left[\frac{x+1}{3}\right]=2\Rightarrow x\in[5,7)$

4) Dacă k = 3 atunci: $\left[\frac{x-1}{2}\right]=3,\left[\frac{x+1}{3}\right]=3\Rightarrow x\in[8,9)$

13. Rezolvaţi ecuaţia $\left[x^2+x+1\right]=x+1$.

Soluție. Avem $x+1=\left[x^2+x+1\right] \Rightarrow x+1 \in Z \Rightarrow x \in \mathbf{Z}$

Avem de asemenea $\left[x^2+x+1\right] \le x^2+x+1 < \left[x^2+x+1\right]+1 \Rightarrow$

$x+1 \le x^2+x+1 < x+2 \Rightarrow 0 \le x^2 < 1 \Rightarrow x^2 \in [0,1) \cap \mathbf{Z} \Rightarrow x=0$

14. Rezolvaţi ecuaţia $5 \cdot [x^2] - 3 \cdot [x] - 2 = 0$.

Soluție. Avem: $x-1<[x]\le x,\ x^2-1<[x^2]\le x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x < -3\cdot[x] < -3x+3, \quad 5x^2-5 < 5\cdot[x^2] \le 5x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2-3x-5 < 5\cdot[x^2]-3\cdot[x] < 5x^2-3x+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2-3x-7 < 5\cdot[x^2]-3\cdot[x]-2 < 5x^2-3x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2-3x-7 < 0 < 5x^2-3x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{149}}{10}, \frac{3+\sqrt{149}}{10}\right) \Rightarrow [x] \in \{-1, 0, 1\}$.

1) Dacă $[x]=-1$ ecuația devine $5\cdot[x^2]-3(-1)-2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5\cdot[x^2]+1=0 \Rightarrow 5\cdot[x^2]=-1$, ecuație ce nu are soluție deoarece $x^2 \ge 0 \Rightarrow [x^2] \ge 0$.

2) Dacă $[x]=0$, analog se arată că ecuația nu are soluție.

3) Dacă $[x]=1 \Rightarrow x \in [1,2) \Rightarrow x^2 \in [1,4) \Rightarrow [x^2]=1$ sau $[x^2]=2$ sau $[x^2]=3$.

Dacă $[x^2]=1$ atunci ecuaţia devine: $5\cdot 1-3\cdot 1-2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0=0$ și deci este verificată ecuația.

$[x]=1$ şi $[x^2]=1 \Rightarrow x \in [1,2) \cap [1,\sqrt{2}) \Rightarrow x \in [1,\sqrt{2})$.

Dacă $[x^2]=2$ sau $[x^2]=3$ se demonstrează că nu obţinem soluţie.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Calculați $\left[\sqrt{5}\right]$ și arătați că este egală cu:

1 **2** **3** **4** **5**

2. Calculați $\left[(1+\sqrt{2})^2\right]$ și arătați că este egală cu:

3 **4** **5** **6** **7**

3. Calculați $\left[(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\right]$ și arătați că este egală cu:

0 **1** **2** **3** **4**

4. Calculați $\left[\sqrt{2+\sqrt{5}}\right]$ și arătați că este egală cu:

0 **1** **2** **3** **4**

5. Calculați $\left\{\sqrt{3}\right\}$ și arătați că este egală cu:

$\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\mathbf{\sqrt{3}-1}$ $\mathbf{\sqrt{3}}$ $\mathbf{\sqrt{3}+1}$

6. Calculați $\left\{\sqrt{3}-1\right\}$ și arătați că este egală cu:

$\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\mathbf{\sqrt{3}-1}$ $\mathbf{\sqrt{3}}$ $\mathbf{\sqrt{3}+1}$

7. Calculați $\left\{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right\}$ și arătați că este egală cu:

$\mathbf{0}$ $\mathbf{3-\sqrt{2}}$ $\mathbf{\sqrt{2}-1}$ $\mathbf{\sqrt{2}}$ $\mathbf{3-\sqrt{8}}$

8. Calculați $\left[\sqrt{2}-1\right]+\left[\sqrt{3}-\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{4}-\sqrt{3}\right]$ și arătați că este egală cu:

0 **1** **2** **3** **4**

9. Calculați $\left\{\sqrt{2}-1\right\}+\left\{\sqrt{3}-\sqrt{2}\right\}+\left\{\sqrt{4}-\sqrt{3}\right\}$ și arătați că este egală cu: **0** **1** **2** **3** **4**

10. Calculați $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+\left[\sqrt{4\cdot 5}\right]$ și arătați că este egală cu:

8 **9** **10** **11** **12**

11. Soluția ecuației $\{x\}=x$ este:

0,5 **0** $\mathbf{[0,1)}$ **1** **1,5**

12. Soluția ecuației $\{x\}=[x]+1$ este:

0,5 **0** $\mathbf{-1}$ **1** **1,5**

13. Soluțiile ecuației $\{x\}+1=\left[\frac{x}{2}\right]$ sunt:

0 și 1 **0 și 2** **1 și 2** **1 și 3** **2 și 3**

14. Soluția ecuației $\{2x+1\}=2x-1$ este:

$\mathbf{[0,1)}$ **0** **1** $\mathbf{\left[\frac{1}{2},1\right)}$ **1,5**

1.3 Inegalități

a) Noțiuni teoretice și exemple

Pentru a demonstra inegalități, ne bazăm pe proprietățile relației de ordine pe mulțimea **R**. Se folosesc transformările echivalente și se obține o sumă de pătrate mai mare sau egală cu zero.

a) Inegalități ce pot fi folosite pentru a demonstra alte inegalități.

1) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Soluție. $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

2) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Soluție. $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$.

3) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.

Soluție. $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

4) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Soluție. $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

5) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$.

Soluție. $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

6) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Soluție. $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

7) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Soluție. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

8) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Soluție. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$

9) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Soluție. Se folosește identitatea:

$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$.

Se înlocuiește a^3 cu a, b^3 cu b și c^3 cu c și se obține inegalitatea dorită.

b) Alte inegalități.

1. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2.$$

(**Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski**)

Soluție. După desfacerea parantezelor și efectuarea calculelor se obține inegalitatea: $(ay-bx)^2 \geq 0$, care este evidentă.

2. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}.$$

(**Inegalitatea lui Minkovski**)

Soluție. După ridicarea la pătrat se obține inegalitatea:

$$\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \geq ax+by.$$

a) Dacă $ax+by \leq 0$, inegalitatea este evident adevărată.

b) Dacă $ax+by > 0$, ridicând la pătrat ambii membri ai inegalității obținem: $(ay-bx)^2 \geq 0$.

b) Probleme rezolvate

1. Arătați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Soluție. Se aplică succesiv inegalitatea **3)** și obținem:

$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}.$

Adunând membru cu membru cele trei inegalități obținem:

$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}+\frac{c+a}{4} = \frac{a+b+b+c+c+a}{4} =$

$= \frac{2a+2b+2c}{4} = \frac{a+b+c}{2}.$

2. Arătați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Soluție. Se aplică inegalitatea **8)** pentru numerele reale ab, bc, ca și se obține: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 + a^2bc =$
$= abc(a + b + c)$.

3. Arătați că dacă $a, b > 0, a + b = 1$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $ab \leq \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ c) $2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2$.

Soluție. a) $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} + 1 + \frac{a}{b} \geq 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, adevărată conform **7**.

c) $2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2(a + b)^3 - 6ab(a + b) \geq$
$\geq (a + b)^2 - 2ab \Leftrightarrow 2 - 6ab \geq 1 - 2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4}$ inegalitate care s-a demonstrat la a).

4. Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $a^2 \geq 4bc$ b) $ab + bc + ca \leq 0$.

Soluție. a) $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -b - c$ și atunci avem:
$a^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (-b - c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \geq 4bc \Leftrightarrow (b - c)^2 \geq 0$, adevărată.

b) $ab + bc + ca \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq (a + b + c)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 \geq 0$.

5. Demonstrați că dacă $a, b \in R$, atunci este adevărată următoarea inegalitate:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq 2\sqrt{2}.$$

Soluție: Avem: $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{2}$.

Analog: $\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}} \geq \sqrt{2}$. Se adună membru cu membru cele două inegalități.

6. Demonstrați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, atunci sunt adevărate inegalitățile:

a) $abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$;

b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Soluție. a) Notăm: $-a+b+c=x,\ a-b+c=y,\ a+b-c=z$ şi rezolvând sistemul obținem: $a=\frac{y+z}{2},\quad b=\frac{x+z}{2},\quad c=\frac{x+y}{2}$.

Ne rămâne să demonstrăm $\frac{y+z}{2}\cdot\frac{x+z}{2}\cdot\frac{x+y}{2} \geq xyz$, inegalitate ce rezultă din: $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz},\quad \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz},\quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ prin înmulțire membru cu membru.

b) Notăm: $b+c=x, a+c=y, a+b=z$ și rezolvând sistemul obținem: $a=\frac{-x+y+z}{2}$; $b=\frac{x-y+z}{2}$; $c=\frac{x+y-z}{2}$.

Înlocuind, inegalitatea devine:

$$\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-x+y+z}{x}+\frac{x-y+z}{y}+\frac{x+y-z}{z} \geq 3,$$

sau $-1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1 \geq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \geq 6$, inegalitate adevărată deoarece:

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \geq 2$; $\frac{z}{x}+\frac{x}{z} \geq 2$; $\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \geq 2$ conform inegalității **7.**

.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Arătați că dacă $a, b, k > 0$, atunci $\frac{a^3+b^3}{ab\,(a+b)} \geq k$, unde:

$\boldsymbol{k = 1}$ $\boldsymbol{k = 2}$ $\boldsymbol{k = 3}$ $\boldsymbol{k = 4}$ $\boldsymbol{k = 5}$

2. Arătați că dacă $a, b, k > 0$, atunci $\frac{a^2+b^2+8}{a+b} \geq k$, unde:

$\boldsymbol{k = 1}$ $\boldsymbol{k = 2}$ $\boldsymbol{k = 3}$ $\boldsymbol{k = 4}$ $\boldsymbol{k = 5}$

3. Arătați că dacă $a, b, k > 0$ și $a + b = 1$, atunci $\frac{a^3+b^3}{ab} \geq k$, unde:

$\boldsymbol{k = 1}$ $\boldsymbol{k = 2}$ $\boldsymbol{k = 3}$ $\boldsymbol{k = 4}$ $\boldsymbol{k = 5}$

4. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, atunci $\frac{a^2+b^2+c^2+12}{a+b+c} \geq k$, unde:

$\boldsymbol{k = 1}$ $\boldsymbol{k = 2}$ $\boldsymbol{k = 3}$ $\boldsymbol{k = 4}$ $\boldsymbol{k = 5}$

5. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc} \geq k$$

unde: $\boldsymbol{k = 5}$ $\boldsymbol{k = 6}$ $\boldsymbol{k = 7}$ $\boldsymbol{k = 8}$ $\boldsymbol{k = 9}$

6. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, și $a + b + c = 1$, atunci are loc inegalitatea: $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq k$, unde:

$\boldsymbol{k = 1}$ $\boldsymbol{k = 2}$ $\boldsymbol{k = 3}$ $\boldsymbol{k = 4}$ $\boldsymbol{k = 5}$

7. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\frac{b}{ac} + a\right)\left(\frac{c}{ab} + b\right)\left(\frac{a}{bc} + c\right) \geq 8.$$

unde:

$\boldsymbol{k = 1}$ $\boldsymbol{k = 2}$ $\boldsymbol{k = 3}$ $\boldsymbol{k = 4}$ $\boldsymbol{k = 5}$

8. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b}{abc} \geq k,$$

unde: $\boldsymbol{k = 5}$ $\boldsymbol{k = 6}$ $\boldsymbol{k = 7}$ $\boldsymbol{k = 8}$ $\boldsymbol{k = 9}$

CUPRINS