

1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

a) Noțiuni teoretice și exemple

Axioma lui Arhimede. Pentru orice număr real x , există și este unic numărul întreg n astfel încât $x \in [n, n + 1)$.

1. Fiind dat numărul real x , numim **partea întreagă** a lui x și o notăm cu $[x]$, cel mai mare număr întreg, care este mai mic sau egal cu x .

2. Fiind dat numărul real x , numim **partea fracționară** a lui x și o notăm cu $\{x\}$, diferența dintre numărul x și partea întreagă a lui x ($\{x\} = x - [x]$).

Exemple. a) $[1,7] = [1 + 0,7] = 1$; $[-2,3] = [-3 + 0,7] = -3$;
b) $\{5,2\} = 5,2 - [5,2] = 5,2 - 5 = 0,2$,
 $\{-3,1\} = -3,1 - [-3,1] = -3,1 - (-4) = 0,9$.

b) Probleme rezolvate

1. Calculați:

a) $[\sqrt{3}]$ b) $[\sqrt{3 + \sqrt{3}}]$ c) $\{\sqrt{2 + \sqrt{3}}\}$.

Soluție. a) $1 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow [\sqrt{3}] = 1$.

b) $\sqrt{3 + \sqrt{3}} < \sqrt{3 + \sqrt{4}} = \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ și $\sqrt{3 + \sqrt{3}} > \sqrt{3 + 1} = 2$ și atunci $[\sqrt{3 + \sqrt{3}}] = 2$.

c) $\{\sqrt{2 + \sqrt{3}}\} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - [\sqrt{2 + \sqrt{3}}] = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - 1$

2. Calculați: $[\sqrt{n(n+1)}]$ și $\{\sqrt{n(n+1)}\}$.

Soluție. Se arată că:

$$n \leq \sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow [\sqrt{n(n+1)}] = n.$$

$$\{\sqrt{n(n+1)}\} = \sqrt{n(n+1)} - [\sqrt{n(n+1)}] = \sqrt{n(n+1)} - n.$$

3. Fie $x, y \in \mathbf{R}$. Demonstrați că:

$$\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$

Soluție: $x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\} \Rightarrow x - y = [x] - [y] + \{x\} - \{y\}$. Evident: $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$.

4. Demonstrați că $(\forall)x \in \mathbf{R}$ și $(\forall)k \in \mathbf{Z}$:

a) $[x+k] = [x] + k$; b) $\{x+k\} = \{x\}$.

Soluție. a) $[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow [x] + k \leq x + k < [x] + k + 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow [x+k] = [x] + k$.

b) $\{x+k\} = x+k - [x+k] = x+k - [x] - k = x - [x] = \{x\}$.

5. Fie $x, y \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$. Să se demonstreze că:

$$\{x\} + \{y\} = 1 \Leftrightarrow x + y \in \mathbf{Z}.$$

Soluție. Fie $x, y \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ astfel încât $x + y \in \mathbf{Z}$. Atunci:

$$x + y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \{x\} + \{y\} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x\} + \{y\} = 1, \text{ deoarece } \{x\}, \{y\} \in (0, 1).$$

6. Rezolvați ecuația $[x] = \frac{x+1}{2}$.

Soluție. Avem $\frac{x+1}{2} \in \mathbf{Z}$ și $[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{2} \in \mathbf{Z} \text{ și } \frac{x+1}{2} \leq x < \frac{x+1}{2} + 1 \Rightarrow \frac{x+1}{2} \in \mathbf{Z}$$

$$\text{și } x \in [1, 3) \Rightarrow x = 1.$$

7. Rezolvați ecuația $\{x\} = x + 1$.

Soluție. $\{x\} = x + 1 \Rightarrow \{x\} = \{x\} + [x] + 1 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in [-1, 0)$.

8. Rezolvați ecuația $x + \{x\} = [x] + 1$.

Soluție. $x = \{x\} + [x]$ și înlocuind în ecuație obținem $\{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = k + \frac{1}{2}$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

9. Rezolvați ecuația $\{x\} = [x]$.

Soluție. $\{x\} = [x] \in \mathbf{Z} \Rightarrow \{x\} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 0$.

10. Rezolvați inecuația $\lfloor x-1 \rfloor \leq 2$.

Soluție. Avem: $x-1 < \lfloor x-1 \rfloor + 1 \leq 2+1 = 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x-1 < 3 \Rightarrow x < 4$.

11. Rezolvați ecuația $\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = x-2$.

Soluție. Avem: $x-2 = \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor \in \mathbf{Z} \Rightarrow x-2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \mathbf{Z}$.

Avem de asemenea:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor &\leq \frac{x+1}{3} < \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + 1 \Rightarrow x-2 \leq \frac{x+1}{3} < x-2+1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x-2 &\leq \frac{x+1}{3} < x-1 \Rightarrow 3x-6 \leq x+1 < 3x-3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x &\leq 7 \text{ și } 2x > 4 \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in (2, \frac{7}{2}]. \end{aligned}$$

Cum $x \in \mathbf{Z}$ rezultă $x = 3$.

12. Rezolvați ecuația $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor$.

Soluție. Notăm: $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = k$. Atunci avem:

$$k \leq \frac{x-1}{2} < k+1, k \leq \frac{x+1}{3} < k+1 \Rightarrow 2k+1 \leq x < 2k+3$$

și $3k-1 \leq x < 3k+2 \Rightarrow -2k-3 < -x \leq -2k-1$ și $3k-1 \leq x <$
 $< 3k+2$ și adunând membru cu membru obținem:

$$k-4 < 0 < k+1 \Rightarrow -1 < k < 4 \text{ și cum } k \in \mathbf{Z} \text{ rezultă: } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

1) Dacă $k = 0$ atunci: $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 0, \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = 0 \Rightarrow x \in [1, 2)$

2) Dacă $k = 1$ atunci: $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 1, \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = 1 \Rightarrow x \in [3, 5)$

3) Dacă $k = 2$ atunci: $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 2, \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = 2 \Rightarrow x \in [5, 7)$

4) Dacă $k = 3$ atunci: $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 3, \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = 3 \Rightarrow x \in [8, 9)$

13. Rezolvați ecuația $[x^2 + x + 1] = x + 1$.

Soluție. Avem $x + 1 = [x^2 + x + 1] \Rightarrow x + 1 \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \mathbf{Z}$

Avem de asemenea $[x^2 + x + 1] \leq x^2 + x + 1 < [x^2 + x + 1] + 1 \Rightarrow$
 $x + 1 \leq x^2 + x + 1 < x + 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow x^2 \in [0, 1) \cap \mathbf{Z} \Rightarrow x = 0$

14. Rezolvați ecuația $5 \cdot [x^2] - 3 \cdot [x] - 2 = 0$.

Soluție. Avem: $x - 1 < [x] \leq x, x^2 - 1 < [x^2] \leq x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3x < -3 \cdot [x] < -3x + 3, \quad 5x^2 - 5 < 5 \cdot [x^2] \leq 5x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 3x - 5 < 5 \cdot [x^2] - 3 \cdot [x] < 5x^2 - 3x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 3x - 7 < 5 \cdot [x^2] - 3 \cdot [x] - 2 < 5x^2 - 3x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 3x - 7 < 0 < 5x^2 - 3x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{3 - \sqrt{149}}{10}, \frac{3 + \sqrt{149}}{10} \right) \Rightarrow [x] \in \{-1, 0, 1\}.$$

1) Dacă $[x] = -1$ ecuația devine $5 \cdot [x^2] - 3(-1) - 2 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 5 \cdot [x^2] + 1 = 0 \Rightarrow 5 \cdot [x^2] = -1$, ecuație ce nu are soluție
deoarece $x^2 \geq 0 \Rightarrow [x^2] \geq 0$.

2) Dacă $[x] = 0$, analog se arată că ecuația nu are soluție.

3) Dacă $[x] = 1 \Rightarrow x \in [1, 2) \Rightarrow x^2 \in [1, 4) \Rightarrow [x^2] = 1$ sau
 $[x^2] = 2$ sau $[x^2] = 3$.

Dacă $[x^2] = 1$ atunci ecuația devine: $5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 0 = 0$ și deci este verificată ecuația.

$$[x] = 1 \text{ și } [x^2] = 1 \Rightarrow x \in [1, 2) \cap [1, \sqrt{2}) \Rightarrow x \in [1, \sqrt{2}).$$

Dacă $[x^2] = 2$ sau $[x^2] = 3$ se demonstrează că nu obținem soluție.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Calculați $[\sqrt{5}]$ și arătați că este egală cu:

1 2 3 4 5

2. Calculați $[(1 + \sqrt{2})^2]$ și arătați că este egală cu:

3 4 5 6 7

3. Calculați $[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2]$ și arătați că este egală cu:

0 1 2 3 4

4. Calculați $\lfloor \sqrt{2 + \sqrt{5}} \rfloor$ și arătați că este egală cu:

0 1 2 3 4

5. Calculați $\{\sqrt{3}\}$ și arătați că este egală cu:

0 1 $\sqrt{3} - 1$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{3} + 1$

6. Calculați $\{\sqrt{3} - 1\}$ și arătați că este egală cu:

0 1 $\sqrt{3} - 1$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{3} + 1$

7. Calculați $\{(\sqrt{2} - 1)^2\}$ și arătați că este egală cu:

0 $3 - \sqrt{2}$ $\sqrt{2} - 1$ $\sqrt{2}$ $3 - \sqrt{8}$

8. Calculați $\lfloor \sqrt{2} - 1 \rfloor + \lfloor \sqrt{3} - \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{4} - \sqrt{3} \rfloor$ și arătați că este egală cu:

0 1 2 3 4

9. Calculați $\{\sqrt{2} - 1\} + \{\sqrt{3} - \sqrt{2}\} + \{\sqrt{4} - \sqrt{3}\}$ și arătați că este egală cu:

0 1 2 3 4

10. Calculați $\lfloor \sqrt{1 \cdot 2} \rfloor + \lfloor \sqrt{2 \cdot 3} \rfloor + \lfloor \sqrt{3 \cdot 4} \rfloor + \lfloor \sqrt{4 \cdot 5} \rfloor$ și arătați că este egală cu:

8 9 10 11 12

11. Soluția ecuației $\{x\} = x$ este:

0,5 0 $[0, 1)$ 1 1,5

12. Soluția ecuației $\{x\} = [x] + 1$ este:

0,5 0 -1 1 1,5

13. Soluțiile ecuației $\{x\} + 1 = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ sunt:

0 și 1 0 și 2 1 și 2 1 și 3 2 și 3

14. Soluția ecuației $\{2x + 1\} = 2x - 1$ este:

$[0, 1)$ 0 1 $[\frac{1}{2}, 1)$ 1,5

1.3 Inegalități

a) Noțiuni teoretice și exemple

Pentru a demonstra inegalități, ne bazăm pe proprietățile relației de ordine pe mulțimea \mathbf{R} . Se folosesc transformările echivalente și se obține o sumă de pătrate mai mare sau egală cu zero.

a) Inegalități ce pot fi folosite pentru a demonstra alte inegalități.

1) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Soluție. $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

2) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Soluție. $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

3) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.

Soluție. $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

4) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Soluție. $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

5) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$.

Soluție. $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

6) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

Soluție. $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

7) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Soluție. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

8) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Soluție. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

9) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Soluție. Se folosește identitatea:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.
Se înlocuiește a^3 cu a , b^3 cu b și c^3 cu c și se obține inegalitatea dorită.

b) Alte inegalități.

1. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2.$$

(Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski)

Soluție. După desfacerea parantezelor și efectuarea calculelor se obține inegalitatea: $(ay - bx)^2 \geq 0$, care este evidentă.

2. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a + x)^2 + (b + y)^2}.$$

(Inegalitatea lui Minkovski)

Soluție. După ridicarea la pătrat se obține inegalitatea:

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by.$$

a) Dacă $ax + by \leq 0$, inegalitatea este evident adevărată.

b) Dacă $ax + by > 0$, ridicând la pătrat ambii membri ai inegalității obținem: $(ay - bx)^2 \geq 0$.

b) Probleme rezolvate

1. Arătați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Soluție. Se aplică succesiv inegalitatea 3) și obținem:

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}.$$

Adunând membru cu membru cele trei inegalități obținem:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} &\leq \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{c+a}{4} = \frac{a+b+b+c+c+a}{4} = \\ &= \frac{2a+2b+2c}{4} = \frac{a+b+c}{2}. \end{aligned}$$

2. Arătați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Soluție. Se aplică inegalitatea 8) pentru numerele reale ab, bc, ca și se obține: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 + a^2bc = abc(a + b + c)$.

3. Arătați că dacă $a, b > 0, a + b = 1$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

$$\text{a) } ab \leq \frac{1}{4} \quad \text{b) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4 \quad \text{c) } 2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2.$$

Soluție. a) $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$.

$$\text{b) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} + 1 + \frac{a}{b} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2, \text{ adevărată conform 7.}$$

$$\text{c) } 2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2(a + b)^3 - 6ab(a + b) \geq (a + b)^2 - 2ab \Leftrightarrow 2 - 6ab \geq 1 - 2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4} \text{ inegalitate care s-a demonstrat la a).}$$

4. Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

$$\text{a) } a^2 \geq 4bc \quad \text{b) } ab + bc + ca \leq 0.$$

Soluție. a) $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -b - c$ și atunci avem: $a^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (-b - c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \geq 4bc \Leftrightarrow (b - c)^2 \geq 0$, adevărată.

$$\text{b) } ab + bc + ca \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq (a + b + c)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 \geq 0.$$

5. Demonstrați că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci este adevărată următoarea inegalitate:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq 2\sqrt{2}.$$

Soluție: Avem: $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{2}$.

Analog: $\sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \sqrt{2}$. Se adună membru cu membru cele două inegalități.

6. Demonstrați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, atunci sunt adevărate inegalitățile:

a) $abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$;

b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Soluție. a) Notăm: $-a+b+c = x, a-b+c = y, a+b-c = z$

și rezolvând sistemul obținem: $a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{x+z}{2}, c = \frac{x+y}{2}$.

Ne rămâne să demonstrăm $\frac{y+z}{2} \cdot \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \geq xyz$, inegalitate

ce rezultă din: $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}, \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz}, \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ prin

înmulțire membru cu membru.

b) Notăm: $b+c = x, a+c = y, a+b = z$ și rezolvând sistemul obținem: $a = \frac{-x+y+z}{2}; b = \frac{x-y+z}{2}; c = \frac{x+y-z}{2}$.

Înlocuind, inegalitatea devine:

$$\frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-x+y+z}{x} + \frac{x-y+z}{y} + \frac{x+y-z}{z} \geq 3,$$

sau $-1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 6$, inegalitate adevărată deoarece:

$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2; \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2; \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$ conform inegalității 7.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Arătați că dacă $a, b, k > 0$, atunci $\frac{a^3+b^3}{ab(a+b)} \geq k$, unde:

$$k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4 \quad k = 5$$

2. Arătați că dacă $a, b, k > 0$, atunci $\frac{a^2+b^2+8}{a+b} \geq k$, unde:

$$k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4 \quad k = 5$$

3. Arătați că dacă $a, b, k > 0$ și $a + b = 1$, atunci $\frac{a^3+b^3}{ab} \geq k$, unde:

$$k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4 \quad k = 5$$

4. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, atunci $\frac{a^2+b^2+c^2+12}{a+b+c} \geq k$, unde:

$$k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4 \quad k = 5$$

5. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc} \geq k$$

unde: $k = 5 \quad k = 6 \quad k = 7 \quad k = 8 \quad k = 9$

6. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, și $a + b + c = 1$, atunci are loc inegalitatea: $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq k$, unde:

$$k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4 \quad k = 5$$

7. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, atunci are loc inegalitatea:

$$\left(\frac{b}{ac} + a\right) \left(\frac{c}{ab} + b\right) \left(\frac{a}{bc} + c\right) \geq 8.$$

unde:

$$k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4 \quad k = 5$$

8. Arătați că dacă $a, b, c, k > 0$, atunci are loc inegalitatea: $\frac{(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b}{abc} \geq k$,

unde: $k = 5 \quad k = 6 \quad k = 7 \quad k = 8 \quad k = 9$

CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	205
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	205
1.1.1 Numere raționale	5	205
1.1.2 Numere iraționale. Numere reale	10	206
1.1.3 Operații algebrice cu numere reale.		
Puteri cu exponent întreg	12	208
1.1.4 Ordonarea numerelor reale	18	209
1.1.5 Modulul unui număr real	20	210
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	24	212
1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	27	213
1.1.8 Operații cu intervale de numere reale	32	214
1.2 Elemente de logică matematică	36	214
1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori.		
Operații logice elementare	36	214
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi	41	216
1.2.3 Tipuri de raționamente logice. Metoda reducerii la absurd. Metoda inducției matematice	46	217
1.2.4 Probleme de numărare	50	218
1.3 Inegalități	52	219
1.4 Teste grilă de autoevaluare	57	220
Testul 1	57	220
Testul 2	58	221
Testul 3	59	221
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. Șiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	60	222
2.1 Șiruri	60	222
2.2 Progresii aritmetice	63	223
2.3 Progresii geometrice	69	225
2.4 Teste grilă de autoevaluare	74	226
Testul 1	74	226

Testul 2	75	227
3. Funcții, lecturi grafice	76	228
3.1 Reper cartezian, produs cartezian, drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m, m \in \mathbf{R}$	76	228
3.2 Noțiunea de funcție, funcții egale. Imaginea unei funcții	79	229
3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții numerice	81	229
3.4 Proprietăți ale funcțiilor numerice; mărginire, monotonie	84	230
3.5 Proprietăți ale funcțiilor numerice; paritate, imparitate, periodicitate	85	232
3.6 Compunerea funcțiilor	89	233
3.7 Teste grilă de autoevaluare	93	234
Testul 1	93	234
Testul 2	94	235
4. Funcția de gradul I	95	236
4.1 Ecuația de gradul I	95	236
4.2 Funcția afină. Funcția de gradul I. Grafic. Monotonie.	97	237
4.3 Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I	100	237
4.4 Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I	104	239
4.5 Sisteme de inecuații de gradul I	107	239
4.6 Teste grilă de autoevaluare	109	240
Testul 1	109	240
Testul 2	110	241
5. Funcția de gradul al doilea	111	241
5.1 Ecuația de gradul al doilea.	111	241
5.2 Funcția de gradul al doilea. Monotonie. Punct de extrem. Intersecția funcției cu axele de coordonate. Graficul funcției	119	243
5.3 Semnul funcției de gradul al II-lea. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă	125	245
5.4 Teste de evaluare	130	247
Testul 1	130	247
Testul 2	131	248
6. Vectori în plan	132	248

6.1	Segmente orientate	132	248
6.2	Vectori. Operații cu vectori	136	249
6.3	Vectori coliniari. Descompunerea unui vector după doi vectori dați, necoliniari și nenuli	130	250
6.4	Coliniaritate, concurență, paralelism. Teorema bisectoarei, relația lui Sylvester, teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.	146	251
6.5	Teste de evaluare	153	253
	Testul 1	153	253
7.	Trigonometrie și aplicațiile trigonometriei în geometrie	154	254
7.1	Unități de măsură pentru unghiuri și arce	154	254
7.2	Rezolvarea triunghiului dreptunghic	156	255
7.3	Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice	161	257
7.4	Reducerea la primul cadran	167	258
7.5	Formule de legătură între funcțiile trigonometrice	172	259
7.6	Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	175	261
7.7	Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu, ale jumătății unui unghi	180	262
7.8	Formule pentru transformarea sumei sau diferenței de funcții trigonometrice în produs	186	264
7.9	Teste grilă de autoevaluare	192	265
	Testul 1	192	265
	Testul 2	193	266
8.	Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar în geometria plană	194	268
8.1	Produsul scalar a doi vectori	194	268
8.2	Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Calcularea razei cercului înscris, circumscris și exânscriș în triunghi. Calcul de arii	197	269
8.3	Teste grilă de autoevaluare	203	272
	Testul 1	203	272
	Testul 2	204	273