

2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. Șiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice.

2.1 Șiruri

a) Noțiuni teoretice și exemple

Definiție. Fiind dată o mulțime oarecare A , numim **șir** de elemente din mulțimea A o funcție $f: \mathbf{N}^* \rightarrow A$.

Dacă $A \subset \mathbf{R}$, atunci șirul se numește șir de numere reale.

Notăm $f(n) = a_n$, iar șirul de numere reale cu $(a_n)_{n \geq 1}$.

Observație. Orice șir poate fi definit printr-o **formulă matematică** sau printr-o **relație de recurență** (un termen al șirului este dat în funcție de anteriorul printr-o formulă matematică).

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 3n + 7$ este dat printr-o formulă matematică.

b) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$ este dat printr-o formulă matematică.

c) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ este dat printr-o relație de recurență.

b) Probleme rezolvate

1. Scrieți primii 5 termeni ai șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2n + 5$.

Soluție. $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$; $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 + 5 = 9$; $n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11$; $a_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$;
 $a_5 = 2 \cdot 5 + 5 = 15$.

2. Scrieți primii 5 termeni ai șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Soluție. $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; $n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$;
 $n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$; $n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$;
 $n = 5 \Rightarrow a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$.

3. Scrieți primii 5 termeni ai șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 1$,
 $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Soluție. $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $n = 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$; $n = 4 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 =$
 $= 2 \cdot 7 + 1 = 15$; $a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 5n - 2$. Calculați primii 8 termeni ai șirului. Al cincelea termen este egal cu:

$$21 \quad 23 \quad 24 \quad 25 \quad 26$$

2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Calculați primii 7 termeni ai șirului. Al patrulea termen este egal cu:

$$\frac{7}{6} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{4}$$

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{n+1}{3}$. Calculați primii 11 termeni ai șirului. Diferența dintre al zecelea și primul termen este egal cu:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

4. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Calculați primii 9 termeni ai șirului. Al șaselea termen al șirului este egal cu:

$$125 \quad 126 \quad 127 \quad 128 \quad 129$$

5. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$. Calculați primii 6 termeni ai șirului și arătați că $\frac{a_6}{a_4}$ este egal cu:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 8$$

6. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$. Calculați primii 6 termeni ai șirului și arătați că $\frac{a_4}{a_5}$ este egal cu:

$$\frac{5}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4}$$

7. Se consideră șirul de numere: $2, 3, 4, \dots$. Termenul general al șirului este: $a_n = n$ $a_n = n + 1$ $a_n = n - 2$ $a_n = n + 2$

8. Se consideră șirul de numere: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$. Termenul general al șirului este egal cu: $a_n = \frac{1}{n}$ $a_n = \frac{1}{n+1}$ $a_n = \frac{n}{n+1}$ $a_n = \frac{n+1}{n}$

2.2 Progresii aritmetice

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție. Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real r , numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând r ($a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k, k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația r .

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = n$ este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall)k, k \geq 2$.

b) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = n^2$ nu este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$, care nu este constant.

2. Formula termenului general al progresiei aritmetice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Exemplu. a) Pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}, a_1 = 2, r = 3$, avem: $a_n = a_1 + (n - 1)r = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$.

3. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teoremă. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ suma primilor n termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

Exemple. a) Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = 3n - 1$, avem $a_1 = 2, a_{10} = 29$, iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2 + 29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul $1, 3, 5, 7, \dots$. Acesta este progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 2$. Atunci termenul 1000 este

$a_{1000} = 1 + 999 \cdot 2 = 1999$. Suma primilor 1000 de termeni ai șirului este egală cu:

$$S_{1000} = \frac{(1 + 1999) \cdot 1000}{2} = 1000000.$$

4. Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice

1. Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, are loc relația:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (\forall)k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (\forall)k, k \geq 2,$$

atunci acest șir este o progresie aritmetică.

3. Fiind date numerele a_1, a_2, \dots, a_n în progresie aritmetică, are loc relația:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \quad (\forall)k, k \geq 2.$$

b) Probleme rezolvarte

1. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ știind că $a_4 = 7$ și $a_8 = 15$.

Soluție. $a_4 = a_1 + 3r = 7$ și $a_8 = a_1 + 7r = 15$. Rezolvând sistemul obținem $a_1 = 1$ și $r = 2$.

2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă avem egalitățile $a_m = n$ și $a_n = m$, $m \neq n$ calculați a_p , $p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Avem: $a_m = a_1 + (m - 1)r = n$ și
 $a_n = a_1 + (n - 1)r = m$.

Rezolvând sistemul format obținem $r = -1$ și $a_1 = m + n - 1$. Atunci $a_p = a_1 + (p - 1)r = m + n - 1 - p + 1 = m + n - p$.

3. Se consideră șirul: 1, 5, 9, ... Determinați rangul termenului 401.

Soluție. Se observă că șirul este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 4$. Notăm cu k rangul termenului 401 și avem: $401 = 1 + (k - 1) \cdot 4 \Rightarrow k = 101$.

4. Determinați progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ știind că $a_1 + a_3 = 8$ și $S_4 = 22$.

Soluție. $a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2r = 8 \Rightarrow a_1 + r = 4$.

$$S_4 = 22 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_4)4}{2} = 22 \Rightarrow 2a_1 + 3r = 11.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuații obținem: $a_1 = 1$ și $r = 3$.

5. Rezolvați ecuația:

$$1 + 3 + 5 + \dots + x = 100.$$

Soluție. Notăm cu n numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este $r = 2$, primul termen $a_1 = 1$ și suma $S = 100$.

$$\text{Atunci: } S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2} = 100 \Rightarrow n^2 = 100 \Rightarrow n = 10.$$

6. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică și S_k suma primilor k termeni ai săi. Să se demonstreze că dacă $S_m = m$ și $S_n = n$, $m \neq n$, atunci $S_p = p$ (\forall) $p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. $S_m = m \Rightarrow \frac{[a_1 + a_m]m}{2} = m \Rightarrow 2a_1 + (m - 1)r = 2$.

$$S_n = n \Rightarrow \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = n \Rightarrow 2a_1 + (n-1)r = 2.$$

Scăzând membru cu membru cele două relații obținem:
 $r(m-n) = 0 \Rightarrow r = 0$ ($m \neq n$). Atunci $a_1 = 1$.

$$S_p = \frac{[a_1 + a_p]p}{2} = \frac{(1+1)p}{2} = p.$$

7. Dacă numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică sau $a + b + c = 0$.

Soluție. Deoarece numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci are loc relația:

$$\begin{aligned} b^2 - ac &= \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} \Rightarrow a^2 - bc + c^2 - ab - 2b^2 + \\ &+ 2ac = 0 \Rightarrow (a+c)^2 - b^2 - b(a+b+c) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a+b+c)(a-b+c) - b(a+b+c) = 0 \Rightarrow (a+b+c) \cdot \\ &\cdot (a-2b+c) = 0 \Rightarrow a+b+c = 0 \text{ sau } b = \frac{a+c}{2}. \end{aligned}$$

8. Să se arate că dacă $a > 0, b > 0, c > 0$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

Soluție. Fie r rația progresiei. Notăm:

$$A = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{c - b} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{r}.$$

Analog obținem:

$$B = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{2r},$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{r}.$$

Evident $2B = A + C$ și atunci rezultă că numerele A, B, C sunt în progresie aritmetică.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ progresia aritmetică cu $a_1 = 2$ și rația $r = 2$.
Calculați a_5 și arătați că are valoarea:

6 8 10 12 14

2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ progresia aritmetică cu $a_6 = 16$ și rația $r = 3$.
Calculați primul termen a_1 și arătați că are valoarea:

1 2 0 3 5

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $a_1 + a_5 = 10$ și $a_3 + a_8 = 10$. Calculați termenul a_{10} și arătați că are valoarea:

10 20 0 15 5

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $a_4 + a_5 = 23$ și $a_1 + a_2 + a_3 = 12$. Calculați termenul a_8 și arătați că are valoarea:

19 20 21 22 23

5. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $S_4 = 10$ și $S_6 = 21$. Calculați termenul a_{100} și arătați că are valoarea:

99 100 120 82 83

6. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât să avem: $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ și $a_2 + a_3 + a_4 = 18$. Calculați suma primilor 15 termeni ai progresiei și arătați că are valoarea:

200 210 220 230 240

7. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică, astfel încât să avem egalitățile $a_m = m$ și $a_n = n, m \neq n$ calculați $a_p, p \in \mathbf{N}^*$ și arătați că a_p ia valoarea:

m n p $m + n$ $m + p$

8. Ecuația $2 + 5 + 8 + \dots + x = 155$ are soluția egală cu:

10 20 0 15 5

9. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu suma primilor n termeni egală cu $n^2 + n$.
Arătați că șirul este progresie aritmetică cu termenul general egal cu:

$n + 1$ $2n$ $n + 2$ $2n + 2$ $n + 3$

CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	165
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	165
1.1.1 Numere raționale	5	165
1.1.2 Numere iraționale. Numere reale	10	166
1.1.3 Operații algebrice cu numere reale. Puteri cu exponent întreg	12	168
1.1.4 Ordonarea numerelor reale	18	169
1.1.5 Modulul unui număr real	20	170
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	24	172
1.1.7 Operații cu intervale de numere reale	27	173
1.2 Elemente de logică matematică	31	173
1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori. Operații logice elementare	31	173
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi	36	175
1.2.3 Tipuri de raționamente logice. Metoda reducerii la absurd. Metoda inducției matematice	41	176
1.3 Teste grilă de autoevaluare	45	177
Testul 1	45	177
Testul 2	46	178
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. Șiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	47	179
2.1 Șiruri	47	179
2.2 Progresii aritmetice	49	180
2.3 Progresii geometrice	54	181
2.4 Teste grilă de autoevaluare	58	182
Testul 1	58	182
3. Funcții, lecturi grafice	59	182
3.1 Reper cartezian, produs cartezian, drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, $m \in \mathbf{R}$	59	182
3.2 Noțiunea de funcție, funcții egale. Imaginea unei funcții	62	182
3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții		

numerice	64	184
3.4 Proprietăți ale funcțiilor numerice; mărgi- nire, monotonie	67	185
3.5 Proprietăți ale funcțiilor numerice; paritate, imparitate, periodicitate	69 70	186
3.6 Compunerea funcțiilor	72	187
3.7 Teste grilă de autoevaluare	76	189
Testul 1	76	189
4. Funcția de gradul I	77	190
4.1 Ecuația de gradul I	77	190
4.2 Funcția afină. Funcția de gradul I. Grafic. Monotonie.	79	191
4.3 Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I	82	191
4.4 Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I	86	193
4.5 Teste grilă de autoevaluare	89	193
Testul 1	89	193
Testul 2	90	194
5. Funcția de gradul al doilea	91	105
5.1 Ecuația de gradul al doilea.	91	195
5.2 Funcția de gradul al doilea. Monotonie. Punct de extrem. Intersecția funcției cu axele de coordonate. Graficul funcției	98	196
5.3 Semnul funcției de gradul al II-lea. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă	104	198
5.4 Teste de evaluare	108	200
Testul 1	108	200
6. Vectori în plan	109	201
6.1 Segmente orientate	109	201
6.2 Vectori. Operații cu vectori	113	201
6.3 Vectori coliniari. Descompunerea unui vector după doi vectori dați, necoliniari și nenuli	119	202
6.4 Coliniaritate, concurență, paralelism. Calcul vectorial în geometria plană	123	203
6.5 Teste de evaluare	127	205
Testul 1	127	205
7. Trigonometrie și aplicațiile trigonometriei în geometrie	128	206
7.1 Unități de măsură pentru unghiuri și arce	128	206

7.2 Rezolvarea triunghiului dreptunghic . . .	130	206
7.3 Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice	135	208
7.4 Reducerea la primul cadran	141	209
7.5 Formule de legătură între funcțiile trigonometrice	145	211
7.6 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	148	212
7.7 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu, ale jumătății unui unghi	152	213
7.8 Calculul lungimii unui segment și a măsurii unui unghi. Aplicațiile trigonometriei în geometrie	157	215
7.9 Teste grilă de autoevaluare	163	217
Testul 1	163	217
Testul 2	164	218