2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. Șiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice.

2.1 Șiruri

a) Noțiuni teoretice și exemple

Definiție. Fiind dată o mulțime oarecare A, numim **șir** de elemente din mulțimea A o funcție $f\colon \mathbf{N}^* \to A$**.**

Dacă $A \subset \mathbf{R}$, atunci șirul se numește șir de numere reale.

Notăm $f(n) = a_{n,}$ iar șirul de numere reale cu $(a_n)_{n\geq1}$.

Observație. Orice șir poate fi definit printr-o **formulă matematică** sau printr-o **relație de recurență** (un termen al șirului este dat în funcție de anteriorul printr-o formulă matematică).

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n\geq1}, a_n = 3n + 7$ este dat printr-o formulă matematică.

b) Șirul $(a_n)_{n\geq1}, a_n = \frac{n}{n+1}$ este dat printr-o formulă matematică.

c) Șirul $(a_n)_{n\geq1},\ a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2$ este dat printr-o relație de recurență.

b) Probleme rezolvate

1. Scrieți primii 5 termeni ai șirului $(a_n)_{n\geq1}, a_n = 2n + 5$.

Soluție. $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7; n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 + 5 = = 9; n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11;\ a_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13;$
$a_5 = 2 \cdot 5 + 5 = 15.$

2. Scrieți primii 5 termeni ai șirului $(a_n)_{n\geq1}, a_n = \frac{n}{n+1}$.

Soluție. $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};\ n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3};$
$n = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4};\ n = 4 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5};$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}.$

3. Scrieți primii 5 termeni ai șirului $(a_n)_{n\geq1},\ a_1 = 1,$ $a_n = 2a_{n-1} + 1.$

Soluție. $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, n = 3 \Rightarrow \Rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7;\ n = 4 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 = = 2 \cdot 7 + 1 = 15;\ a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31.$

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 5n - 2$. Calculați primii 8 termeni ai șirului. Al cincelea termen este egal cu:

21 **23** **24** **25** **26**

2. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Calculați primii 7 termeni ai șirului. Al patrulea termen este egal cu:

$\mathbf{\frac{7}{6}}$ $\mathbf{\frac{5}{3}}$ $\mathbf{\frac{5}{9}}$ $\mathbf{\frac{2}{7}}$ $\mathbf{\frac{1}{4}}$

3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \frac{n+1}{3}$. Calculați primii 11 termeni ai șirului. Diferența dintre al zecelea și primul termen este egal cu:

0 **1** **2** **3** **4**

4. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$. Calculați primii 9 termeni ai șirului. Al șaselea termen al șirului este egal cu:

125 **126** **127** **128** **129**

5. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$. Calculați primii 6 termeni ai șirului și arătați că $\frac{a_6}{a_4}$ este egal cu:

1 **2** **3** **4** **8**

6. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}$. Calculați primii 6 termeni ai șirului și arătați că $\frac{a_4}{a_5}$ este egal cu:

$\mathbf{\frac{5}{6}}$ $\mathbf{\frac{1}{3}}$ $\mathbf{\frac{5}{4}}$ $\mathbf{\frac{2}{3}}$ $\mathbf{\frac{1}{4}}$

7. Se consideră șirul de numere: $2, 3, 4, \cdots$. Termenul general al șirului este: $\boldsymbol{a_n = n}$ $\boldsymbol{a_n = n + 1}$ $\boldsymbol{a_n = n - 2}$ $\boldsymbol{a_n = n + 2}$

8. Se consideră șirul de numere: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$. Termenul general al șirului este egal cu: $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{n}}$ $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{n+1}}$ $\boldsymbol{a_n = \frac{n}{n+1}}$ $\boldsymbol{a_n = \frac{n+1}{n}}$

2.2 Progresii aritmetice
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real r, numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând r ($a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k,\ k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația r.

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n$ este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall)k, k \geq 2$.
b) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n^2$ nu este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$, care nu este constant.

2. Formula termenului general al progresiei aritmetice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Exemplu. a) Pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 2$, $r = 3$, avem: $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$.

3. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teoremă. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_n = a_1 + a_2 + + \cdots + a_n$ suma primilor *n* termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

Exemple. a) Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = = 3n - 1$, avem $a_1 = 2, a_{10} = 29$, iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2+29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul $1, 3, 5, 7, \cdots$. Acesta este progresie aritmetică cu primul termen a_1 =1 și rația $r = 2$. Atunci termenul 1000 este

$a_{1000} = 1 + 999 \cdot 2 = 1999$. Suma primilor 1000 de termeni ai șirului este egală cu:

$$S_{1000} = \frac{(1 + 1\,999) \cdot 1\,000}{2} = 1\,000\,000.$$

4. Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice

1. Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, are loc relația:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \ (\forall)k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \ (\forall)k, k \geq 2,$$

atunci acest șir este o progresie aritmetică.

3. Fiind date numerele $a_1, a_{2,} \cdots, a_n$ în progresie aritmetică, are loc relația:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \ (\forall)k, k \geq 2.$$

b) Probleme rezolvarte

1. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_4 = 7$ și $a_8 = 15$.

Soluție. $a_4 = a_1 + 3r = 7$ și $a_8 = a_1 + 7r = 15$. Rezolvând sistemul obținem $a_1 = 1$ și $r = 2$.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă avem egalitățile $a_m = n$ și $a_n = m, m \neq n$ calculați $a_{p,}\ p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Avem: $a_m = a_1 + (m-1)r = n$ și

$$a_n = a_1 + (n-1)r = m.$$

Rezolvând sistemul format obținem $r = -1$ și $a_1 = m + n - 1$. Atunci $a_p = a_1 + (p-1)r = m + n - 1 - p + 1 = m + n - p$.

3. Se consideră șirul: 1, 5, 9, $\cdots$. Determinați rangul termenului 401.

Soluție. Se observă că șirul este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 4$. Notăm cu k rangul termenului 401 și avem: $401 = 1 + (k-1)\cdot 4 \Rightarrow k = 101$.

4. Determinați progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 + a_3 = 8$ și $S_4 = 22$.

Soluție. $a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2r = 8 \Rightarrow a_1 + r = 4$.

$$S_4 = 22 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_4)4}{2} = 22 \Rightarrow 2a_1 + 3r = 11.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuații obținem: $a_1 = 1$ și $r = 3$.

5. Rezolvați ecuația:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + x = 100.$$

Soluție. Notăm cu n numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este $r = 2$, primul termen $a_1 = 1$ și suma $S = 100$. Atunci: $S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]\cdot n}{2} = 100 \Rightarrow n^2 = 100 \Rightarrow n = 10$.

6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și S_k suma primilor k termeni ai săi. Să se demonstreze că dacă $S_m = m$ și $S_n = n$, $m \neq n$, atunci $S_p = p\ (\forall)p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. $S_m = m \Rightarrow \frac{[a_1 + a_m]m}{2} = m \Rightarrow 2a_1 + (m-1)r = 2$.

$S_n = n \Rightarrow \dfrac{[a_1 + a_n]n}{2} = n \Rightarrow 2a_1 + (n-1)r = 2.$

Scăzând membru cu membru cele două relații obținem: $r(m-n) = 0 \Rightarrow r = 0$ $(m \neq n)$. Atunci $a_1 = 1$.

$S_p = \dfrac{[a_1 + a_p]p}{2} = \dfrac{(1+1)p}{2} = p.$

7. Dacă numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică sau $a + b + c = 0$.

Soluție. Deoarece numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci are loc relația:

$b^2 - ac = \dfrac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} \Rightarrow a^2 - bc + c^2 - ab - 2b^2 +$
$+2ac = 0 \Rightarrow (a+c)^2 - b^2 - b(a+b+c) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+b+c)(a-b+c) - b(a+b+c) = 0 \Rightarrow (a+b+c) \cdot$
$\cdot (a - 2b + c) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$ sau $b = \dfrac{a+c}{2}$.

8. Să se arate că dacă $a > 0, b > 0, c > 0$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

Soluție. Fie r rația progresiei. Notăm:

$A = \dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{c-b} = \dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r}.$

Analog obținem:

$B = \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2r},$

$C = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}.$

Evident $2B = A + C$ și atunci rezultă că numerele A, B, C sunt în progresie aritmetică.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică cu $a_1 = 2$ și rația $r = 2$. Calculați a_5 și arătați că are valoarea:

6 **8** **10** **12** **14**

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică cu $a_6 = 16$ și rația $r = 3$. Calculați primul termen a_1 și arătați că are valoarea:

1 **2** **0** **3** **5**

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $a_1 + a_5 = 10$ și $a_3 + a_8 = 10$. Calculați termenul a_{10} și arătați că are valoarea:

10 **20** **0** **15** **5**

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $a_4 + a_5 = 23$ și $a_1 + a_2 + a_3 = 12$. Calculați termenul a_8 și arătați că are valoarea:

19 **20** **21** **22** **23**

5. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât $S_4 = 10$ și $S_6 = 21$. Calculați termenul a_{100} și arătați că are valoarea:

99 **100** **120** **82** **83**

6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică astfel încât să avem: $a_1 + {} + a_2 + a_3 = 12$ și $a_2 + a_3 + a_4 = 18$. Calculați suma primilor 15 termeni ai progresiei și arătați că are valoarea:

200 **210** **220** **230** **240**

7. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, astfel încât să avem egalitățile $a_m = m$ și $a_n = n, m \neq n$ calculați $a_{p,}$ $p \in \mathbf{N}^*$ și arătați că a_p ia valoarea: $\boldsymbol{m}$ $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{m+n}$ $\boldsymbol{m+p}$

8. Ecuația $2 + 5 + 8 + \cdots + x = 155$ are soluția egală cu:

10 **20** **0** **15** **5**

9. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu suma primilor *n* termeni egală cu $n^2 + n$. Arătați că șirul este progresie aritmetică cu termenul general egal cu:

$\boldsymbol{n+1}$ $\boldsymbol{2n}$ $\boldsymbol{n+2}$ $\boldsymbol{2n+2}$ $\boldsymbol{n+3}$

CUPRINS