# 2.3.2 FUNCȚII DERIVABILE PE UN INTERVAL: PUNCTE DE EXTREM, TEOREMA LUI FERMAT, TEOREMA LUI ROLLE, TEOREMA LUI LAGRANGE

**1**. Să se arate că funcțiile următoare au punctele de extrem specificate:

a) $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = x^2 - 2x$, $x = 1$ punct de minim;
b) $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $x = 3$ punct de maxim;
c) $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = -x^2$, $x = 0$ punct de maxim.

**2**. Să se arate că funcțiile următoare au punctele de extrem specificate:

a) $f: [-1,\ 1] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = 2x + 1$, $x = -1$ punct de minim și $x = 1$ punct de maxim;
b) $f: [-2,\ 3] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = -x + 4$, $x = 1$ punct de minim și $x = 6$ punct de maxim;
c) $f: [-2,\ 2] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = x^2 + 2x$, $x = -1$ punct de minim și $x = \pm 2$ puncte de maxim.

**3**. Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile următoare:

a) $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = x^2 + 1$;
b) $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = -x^2 + x + 1$;
c) $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = |x - 1|$

**4**. Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile următoare:

a) $f: [-1,\ 5] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = x + 1$;
b) $f: [-2,\ 5] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = |x + 2|$;
c) $f: [-3,\ 1] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = x^2 + x$.

**5**. Să se determine punctele critice ale funcțiilor $f$ definite pe un domeniu pe care $f$ este derivabilă:

a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
c) $f(x) = e^x(x - 2)$ d) $f(x) = x^2 e^x$
e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ f) $f(x) = \ln(x^3 - x)$.

**6**. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Fermat următoarelor funcții în punctele specificate:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ în punctul $x = 2$;

b) $f(x) = x \ln x$ în punctul $x = \frac{1}{e}$;

c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ în punctele $x = 0$ și $x = 2$.

**7**. Să se aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcţii:

a) $f:[0,3] \to [-1,2], \quad f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0,1] \\ 2-x & , x \in (1,3] \end{cases}$;

b) $f:[-1,1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \in [-1,0] \\ x & , x \in (0,1] \end{cases}$;

c) $f:[-1,1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^4 & , x \in [-1,0] \\ x^2 & , x \in (0,1] \end{cases}$;

d) $f:[-1,1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \in [-1,0] \\ -2x^2 + x + 1 & , x \in (0,1] \end{cases}$;

e) $f:[-1,1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \in [-1,0] \\ -4x^2 + 2x + 1 & , x \in (0,1] \end{cases}$;

f) $f:[-1,1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \max(1, x, x^3)$;

g) $f:[-1,1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

**8**. Să se aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru următoarele funcţii:

a) $f:[-1,1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & , x \in [-1,0] \\ x^2 & , x \in (0,1] \end{cases}$;

b) $f:[0,2] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in [0,1] \\ 2x-1 & , x \in (1,2] \end{cases}$;

c) $f:[0,2]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{3x+1} & ,\ x\in[0,1)\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4} & ,\ x\in[1,2]\end{cases};$

d) $f:[1,7]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\ln x & ,\ x\in(1,e]\\ \dfrac{x}{e} & ,\ x\in(e,7]\end{cases};$

e) $f:[1,3]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}x & ,\ x\in[1,2]\\ \dfrac{x^2}{4}+1 & ,\ x\in(2,3]\end{cases};$

f) $f:[0,4]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\ln(x+1) & ,\ x\in[0,1]\\ \dfrac{x}{2}+\ln 2-\dfrac{1}{2} & ,\ x\in(1,4]\end{cases};$

g) $f:[-3,5]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\max(x^2-1,\ 2x+1)$.

**9.** Să se determine $a, b, c\in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia:

$$f:[-1,1]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & ,\ x\in[-1,0]\\ 2x & ,\ x\in(0,1]\end{cases}$$

să îndeplinească condiţiile teoremei lui Rolle.

**10.** Să se determine $a, b, c\in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia:

$$f:[-2,1]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}ax^2+2x+b & ,\ x\in[-2,0]\\ cx & ,\ x\in(0,1]\end{cases}$$

să îndeplinească condiţiile teoremei lui Rolle.

**11.** Să se determine $a, b, c\in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia:

$$f:[-2,1]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & ,\ x\in[-2,0]\\ 2x^2+cx+1 & ,\ x\in(0,1]\end{cases}$$

să îndeplinească condiţiile teoremei lui Rolle.

**12.** Să se determine $a, b, c\in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia:

$$f:[-1,e-1]\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & ,x\in[-1,0] \\ \ln(x+c) & ,x\in(0,e-1] \end{cases}$$

să îndeplinească condiţiile teoremei lui Rolle.

**13.** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia:

$$f:[0,+\infty)\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+5x+2} & ,x\in[0,2] \\ ax+b & ,x\in(2,+\infty) \end{cases}$$

să îndeplinească condiţiile teoremei lui Lagrange.

**14.** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia:

$$f:[0,+\infty)\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & ,x\in[0,1] \\ ax+b & ,x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

să îndeplinească condiţiile teoremei lui Lagrange.

**15.** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia:

$$f:\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)\to \mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases} \ln(2x+1) & ,x\in\left(-\frac{1}{2},0\right] \\ ax+b & ,x\in(0,+\infty) \end{cases}$$

să îndeplinească condiţiile teoremei lui Lagrange.

**16.** Să se arate că ecuaţia:

$$4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$$

are cel puţin o rădăcină în (0, 1) dacă $a+b+c+d=0$.

Aceeaşi ecuaţie are cel puţin o rădăcină în (–1, 0) dacă: $a+c=b+d$.

**17.** Să se arate că ecuaţia:

$$5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e=0$$

are cel puţin o rădăcină în (–1, 1) dacă are loc relaţia $a+c+e=0$.

**18.** Să se arate că ecuaţia:

$$6ax^5+5bx^4+4cx^3+3dx^2+2ex+f=0$$

are cel puţin o rădăcină în (–1, 1) dacă are loc relaţia $b+d+f=0$.

**19.** Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & , x\in[-1,0] \\ \ln(x+1) & , x\in(0,1] \end{cases}$.

a) Să se determine $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât să satisfacă condiţiile teoremei lui Rolle pe intervalul [–1,1].

b) Să se aplice teorema lui Rolle funcţiei $f$ obţinută la punctul a) pe intervalul [–1,1].

**20.** Fie $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$ continuă pe $[0,\pi]$, derivabilă pe $(0,\pi)$, $f(x)\neq 0,\ f'(x)\neq 0\ (\forall)\, x\in[0,\pi]$.

Atunci există $c\in(0,\pi)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{f(c)}=\operatorname{ctg} c$.

**21.** Fie $f:\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$ continuă pe $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$, derivabilă pe $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $f(x)\neq 0,\ f'(x)\neq 0\ (\forall)\, x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Atunci există $c\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{f(c)}+\operatorname{tg} c=0$.

**22.** Să se arate că dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sunt continue pe [0,1], derivabile pe (0,1) şi $g(x)\neq 0,\ g'(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(0,1)$, din relaţia $\dfrac{f(1)}{g(1)}=\dfrac{f(0)}{g(0)}$ rezultă că există $c\in(0,1)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(c)}{g(c)}$.

**23.** Fie $f:\left[0,\pi\right]\to\mathbf{R}$ continuă pe $[0,\pi]$, derivabilă pe $(0,\pi)$, $f(x)\neq 0,\ f'(x)\neq 0\ (\forall)\, x\in[0,\pi]$.

Atunci există $c_n\in(0,\pi)$ astfel încât $\dfrac{f(c)}{f'(c)}=n\operatorname{tg} c$.

**24.** Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ continue pe $[a,b]$, derivabile pe $(a,b)$, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ din relaţia $f(a)=f(b)=0$ rezultă că există $c_n\in(0,\pi)$ astfel încât $\dfrac{f'(c_n)}{g'(c_n)}=n\cdot\dfrac{f(c_n)}{g(c_n)}$.

**25.** Fie $f:[0,4]\to[1,2]$ derivabilă pe$[0,4]$, Atunci există $c\in[0,4]$ astfel încât $(c-1)(c-2)f'(c)=3-2c$.

**26.** Fie $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$ continuă pe $[0,\pi]$, derivabilă pe $(0,\pi)$, $f(x)\neq 0$, $(\forall)\,x\in[0,\pi]$. Atunci există $c\in(0,\pi)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{f(c)}+\operatorname{ctg}c=1$.

**27.** Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă pe $[-1,1]$, derivabilă pe $(-1,1)$, $f(-1)+f(1)=0$. Să se demonstreze că există $c\in(-1,1)$ astfel încât $f(c)=c\cdot f'(c)$.

**28.** Fie $f:[0,4]\to\mathbf{R}$ de două ori derivabilă. Dacă $f(1),\ f(2),\ f(3)$ sunt în progresie aritmetică, atunci există $c\in(0,4)$ astfel încât $f''(c)=0$.

**29.** Să se demonstreze că există $x_0\in(0,2\pi)$ astfel încât: $\sum_{k=1}^{n}(\sin kx_0+\cos kx_0)=0$

**30.** Folosind teorema lui Lagrange, să se determine rădăcinile ecuaţiei: $3^x+4^x=2^x+5^x$.

**31.** Folosind teorema lui Lagrange, să se demonstreze că: $\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}<\ln(\alpha+2)<\alpha+1,\quad \alpha>-1.$

**32.** Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata mărginită. Atunci $f$ este funcţie mărginită.

**33.** Fie $f:[1,2]\to\mathbf{R}_+^*$ continuă şi derivabilă pe [1, 2]. Să se arate că există $c\in(1, 2)$ astfel încât să avem relaţia:

$$\frac{f(2)}{f(1)}=e\cdot\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

**34.** Fie $a,b\in\mathbf{R}$ şi $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe $(a,b)$, $af(b)=bf(a)$.

Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât:

$$f(a)-f(c)+f(b)=(a-c+b)f'(c).$$

**35.** Folosind teorema lui Lagrange, să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, cu $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ este divergent.

**36.** Folosind teorema lui Lagrange, să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\ge1}$ cu termenul general:

a) $a_n=n\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$;

b) $a_n=\ln n\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$;

c) $a_n=(n+1)^2\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$;

d) $a_n=n\cdot\left(\frac{e^n}{n}-\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)$;

e) $a_n=\frac{e^n}{n}-\frac{e^{n+1}}{n+1}$;

f) $a_n = n \cdot \left( \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right);$

g) $a_n = n^2 \cdot \left( \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right).$

# CUPRINS