

2.3.2 FUNCȚII DERIVABILE PE UN INTERVAL: PUNCTE DE EXTREM, TEOREMA LUI FERMAT, TEOREMA LUI ROLLE, TEOREMA LUI LAGRANGE

1. Să se arate că funcțiile următoare au punctele de extrem specificate:

- a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 2x, x = 1$ punct de minim;
- b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 6x + 1, x = 3$ punct de maxim;
- c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2, x = 0$ punct de maxim.

2. Să se arate că funcțiile următoare au punctele de extrem specificate:

- a) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1, x = -1$ punct de minim și
 $x = 1$ punct de maxim;
- b) $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x + 4, x = 1$ punct de minim și
 $x = 6$ punct de maxim;
- c) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x, x = -1$ punct de minim și
 $x = \pm 2$ puncte de maxim.

3. Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile următoare:

- a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 1;$
- b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + x + 1;$
- c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x - 1|$

4. Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile următoare:

- a) $f: [-1, 5] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 1;$
- b) $f: [-2, 5] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x + 2|;$
- c) $f: [-3, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + x.$

5. Să se determine punctele critice ale funcțiilor f definite pe un domeniu pe care f este derivabilă:

- a) $f(x) = x^2 - 6x$
- b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
- c) $f(x) = e^x(x - 2)$
- d) $f(x) = x^2 e^x$
- e) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
- f) $f(x) = \ln(x^3 - x).$

6. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Fermat următoarelor funcții în punctele specificate:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ în punctul $x = 2$;

b) $f(x) = x \ln x$ în punctul $x = \frac{1}{e}$;

c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ în punctele $x = 0$ și $x = 2$.

7. Să se aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcții:

a) $f : [0, 3] \rightarrow [-1, 2]$, $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, 1] \\ 2-x & , x \in (1, 3] \end{cases}$;

b) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \in [-1, 0] \\ x & , x \in (0, 1] \end{cases}$;

c) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 & , x \in [-1, 0] \\ x^2 & , x \in (0, 1] \end{cases}$;

d) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \in [-1, 0] \\ -2x^2+x+1 & , x \in (0, 1] \end{cases}$;

e) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \in [-1, 0] \\ -4x^2+2x+1 & , x \in (0, 1] \end{cases}$;

f) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \max(1, x, x^3)$;

g) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

8. Să se aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru următoarele funcții:

a) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & , x \in [-1, 0] \\ x^2 & , x \in (0, 1] \end{cases}$;

b) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in [0, 1] \\ 2x-1 & , x \in (1, 2] \end{cases}$;

$$\text{c) } f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x+1} & , x \in [0, 1) \\ \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} & , x \in [1, 2] \end{cases};$$

$$\text{d) } f : [1, 7] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \ln x & , x \in (1, e] \\ \frac{x}{e} & , x \in (e, 7] \end{cases};$$

$$\text{e) } f : [1, 3] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & , x \in [1, 2] \\ \frac{x^2}{4} + 1 & , x \in (2, 3] \end{cases};$$

$$\text{f) } f : [0, 4] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & , x \in [0, 1] \\ \frac{x}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} & , x \in (1, 4] \end{cases};$$

$$\text{g) } f : [-3, 5] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \max(x^2 - 1, 2x + 1).$$

9. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția:

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & , x \in [-1, 0] \\ 2x & , x \in (0, 1] \end{cases}$$

să îndeplinească condițiile teoremei lui Rolle.

10. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția:

$$f : [-2, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + b & , x \in [-2, 0] \\ cx & , x \in (0, 1] \end{cases}$$

să îndeplinească condițiile teoremei lui Rolle.

11. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția:

$$f : [-2, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & , x \in [-2, 0] \\ 2x^2 + cx + 1 & , x \in (0, 1] \end{cases}$$

să îndeplinească condițiile teoremei lui Rolle.

12. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția:

$$f : [-1, e-1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , x \in [-1, 0] \\ \ln(x+c) & , x \in (0, e-1] \end{cases}$$

să îndeplinească condițiile teoremei lui Rolle.

13. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția:

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 2} & , x \in [0, 2] \\ ax + b & , x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

să îndeplinească condițiile teoremei lui Lagrange.

14. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția:

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , x \in [0, 1] \\ ax + b & , x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

să îndeplinească condițiile teoremei lui Lagrange.

15. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția:

$$f : \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \ln(2x+1) & , x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right] \\ ax + b & , x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

să îndeplinească condițiile teoremei lui Lagrange.

16. Să se arate că ecuația:

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$$

are cel puțin o rădăcină în $(0, 1)$ dacă $a + b + c + d = 0$.

Aceeași ecuație are cel puțin o rădăcină în $(-1, 0)$ dacă:
 $a + c = b + d$.

17. Să se arate că ecuația:

$$5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 0$$

are cel puțin o rădăcină în $(-1, 1)$ dacă are loc relația
 $a + c + e = 0$.

18. Să se arate că ecuația:

$$6ax^5 + 5bx^4 + 4cx^3 + 3dx^2 + 2ex + f = 0$$

are cel puțin o rădăcină în $(-1, 1)$ dacă are loc relația $b+d+f=0$.

19. Fie $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & , x \in [-1, 0] \\ \ln(x+1) & , x \in (0, 1] \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât să satisfacă condițiile teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$.

b) Să se aplice teorema lui Rolle funcției f obținută la punctul a) pe intervalul $[-1, 1]$.

20. Fie $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ continuă pe $[0, \pi]$, derivabilă pe $(0, \pi)$, $f(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$ ($\forall x \in [0, \pi]$).

Atunci există $c \in (0, \pi)$ astfel încât $\frac{f'(c)}{f(c)} = \operatorname{ctg} c$.

21. Fie $f: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$ continuă pe $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, derivabilă pe $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $f(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$ ($\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$).

Atunci există $c \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{f'(c)}{f(c)} + \operatorname{tg} c = 0$.

22. Să se arate că dacă $f(x)$ și $g(x)$ sunt continue pe $[0, 1]$, derivabile pe $(0, 1)$ și $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (0, 1)$,

din relația $\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{f(0)}{g(0)}$ rezultă că există $c \in (0, 1)$ astfel încât

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

23. Fie $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ continuă pe $[0, \pi]$, derivabilă pe $(0, \pi)$, $f(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$ ($\forall x \in [0, \pi]$).

Atunci există $c_n \in (0, \pi)$ astfel încât $\frac{f(c)}{f'(c)} = n \operatorname{tg} c$.

24. Dacă $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) , $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ din relația $f(a) = f(b) = 0$ rezultă că există $c_n \in (0, \pi)$ astfel încât $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = n \cdot \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$.

25. Fie $f: [0, 4] \rightarrow [1, 2]$ derivabilă pe $[0, 4]$, Atunci există $c \in [0, 4]$ astfel încât $(c-1)(c-2)f'(c) = 3-2c$.

26. Fie $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ continuă pe $[0, \pi]$, derivabilă pe $(0, \pi)$, $f(x) \neq 0$, $(\forall) x \in [0, \pi]$. Atunci există $c \in (0, \pi)$ astfel încât $\frac{f'(c)}{f(c)} + \text{ctg } c = 1$.

27. Fie $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[-1, 1]$, derivabilă pe $(-1, 1)$, $f(-1) + f(1) = 0$. Să se demonstreze că există $c \in (-1, 1)$ astfel încât $f(c) = c \cdot f'(c)$.

28. Fie $f: [0, 4] \rightarrow \mathbf{R}$ de două ori derivabilă. Dacă $f(1), f(2), f(3)$ sunt în progresie aritmetică, atunci există $c \in (0, 4)$ astfel încât $f''(c) = 0$.

29. Să se demonstreze că există $x_0 \in (0, 2\pi)$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^n (\sin kx_0 + \cos kx_0) = 0$$

30. Folosind teorema lui Lagrange, să se determine rădăcinile ecuației: $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$.

31. Folosind teorema lui Lagrange, să se demonstreze că:

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} < \ln(\alpha + 2) < \alpha + 1, \quad \alpha > -1.$$

32. Fie $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu derivata mărginită. Atunci f este funcție mărginită.

33. Fie $f: [1, 2] \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ continuă și derivabilă pe $[1, 2]$. Să se arate că există $c \in (1, 2)$ astfel încât să avem relația:

$$\frac{f(2)}{f(1)} = e \cdot \frac{f'(c)}{f(c)}.$$

34. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) , $af(b) = bf(a)$.

Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$f(a) - f(c) + f(b) = (a - c + b)f'(c).$$

35. Folosind teorema lui Lagrange, să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ este divergent.

36. Folosind teorema lui Lagrange, să se calculeze limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general:

a) $a_n = n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \right);$

b) $a_n = \ln n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \right);$

c) $a_n = (n+1)^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \right);$

d) $a_n = n \cdot \left(\frac{e^n}{n} - \frac{e^{n+1}}{n+1} \right);$

e) $a_n = \frac{e^n}{n} - \frac{e^{n+1}}{n+1};$

$$\text{f) } a_n = n \cdot \left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right);$$

$$\text{g) } a_n = n^2 \cdot \left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right).$$

CUPRINS

Enunțuri Rezolvări

1. Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații	5	159
1.1 Permutări	5	159
1.2 Matrice	9	160
1.3 Determinanți	23	164
1.3.1 Determinant de ordin n , proprietăți	23	
1.3.2 Aplicații ale determinanților în geometria plană	30	164
1.4 Sisteme de ecuații liniare	31	165
1.4.1 Matrice inversabile din $M_n(C)$, $n \leq 4$.	31	165
1.4.2 Ecuații și sisteme de ecuații matriceale	33	166
1.4.3 Rangul unei matrice	34	166
1.4.4 Sisteme de ecuații liniare	37	167
1.4.5 Teste de evaluare	44	167
Testul 1	44	167
Testul 2	45	168
2. Elemente de analiză matematică	46	169
2.1 Limite de funcții	46	169
2.1.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală	46	169
2.1.2 Funcții reale de variabilă reală	50	171
2.1.3 Șiruri de numere reale	55	173
2.1.4 Limite de funcții	82	190
2.1.5 Asimptotele graficului funcțiilor studiate	98	200
2.2 Continuitate	101	201
2.2.1 Studiul continuității în puncte de pe dreapta reală, operații cu funcții continue	101	201
2.2.2 Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale, proprietatea lui Darboux, studiul existenței soluțiilor unor ecuații în \mathbb{R}	109	204
2.3 Derivabilitate	113	207
2.3.1 Derivata unei funcții într-un punct, Funcții derivabile, calculul derivatelor		
2.3.2 Funcții derivabile pe un interval: puncte de extrem, teorema lui Fermat, Teorema lui Rolle, teorema lui Lagrange	113	207

2.3.3	Reulile lui L'Hospital	123	212
2.3.4	Rolul derivatei I în studiul funcțiilor: puncte de extrem, monotonia funcțiilor, inegalități, șirul lui Rolle	131	217
2.3.5	Rolul derivatei a II-a în studiul funcțiilor: concavitate, convexitate, puncte de inflexiune	134	218
2.4	Reprezentarea grafică a funcțiilor	140	224
2.4	Reprezentarea grafică a funcțiilor	141	225
2.5	Teste de evaluare	149	226
Testul 1	149	226
Testul 2	150	226
Testul 3	151	227
3.	Teste finale de evaluare	152	228
Testul 1	152	228
Testul 2	153	228
Testul 3	154	228
Testul 4	155	228
Testul 5	156	228
Testul 6	157	228
Testul 7	158	228