1.1.2 GRUP, EXEMPLE: GRUPURI NUMERICE, GRUPURI DE MATRICE, GRUPURI DE PERMUTĂRI, GRUPUL Z_n

1. Arătați în fiecare caz de mai jos că mulțimea G are o structură de grup față de legea de compoziție specificată:

a) $\mathbf{G} = \{-1, 1\}$, față de înmulțire;

b) $\mathbf{G} = \{-1, 1, i, -i\}$, față de înmulțire;

c) $\mathbf{G} = \{1, \varepsilon, \ \varepsilon^2\}$, unde ε este o rădăcină diferită de 1 a ecuației $x^3 - 1 = 0$, față de înmulțire.

2. Arătați în fiecare caz de mai jos că mulțimea G are o structură de grup față de legea de compoziție specificată:

a) $\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ faţă de înmulţire;

b) $\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

faţă de înmulţire;

c) $\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

față de înmulțirea matricelor.

d) $\mathbf{G} = \{\varepsilon, \sigma, \tau\} \subset S_3$, unde $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ față de compunerea permutărilor

e) $\mathbf{G} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, unde $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_2(x) = -\dfrac{1}{x}$

f) $\mathbf{G} = \left\{ \hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11} \right\}$ față de înmulțirea din $\boldsymbol{Z_{12}}$.

3. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$; $x * y = x + y - 2$;

b) $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$; $x * y = x + y + 1$;

c) $\mathbf{G}=\mathbf{Q}$; $x*y=x+y-7$;

d) $\mathbf{G}=\mathbf{R}$; $x*y=x+y-4$;

e) $\mathbf{G}=\mathbf{R}$; $x*y=x\cdot\sqrt{y^2+1}+y\cdot\sqrt{x^2+1}$;

f) $\mathbf{G}=\mathbf{R}$; $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

g) $\mathbf{G}=\mathbf{C}-\{1\}$; $x*y=x+y-xy$.

4. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G}=(-5,+\infty)$; $x*y=xy+5x+5y+20$;

b) $\mathbf{G}=(-3,+\infty)$; $x*y=xy+3x+3y+6$

c) $\mathbf{G}=(1,+\infty)$; $x*y=xy-x-y+2$;

d) $\mathbf{G}=(4,+\infty)$; $x*y=xy-4x-4y+20$;

e) $\mathbf{G}=(\sqrt{2},+\infty)$; $x*y=\sqrt{x^2y^2-2x^2-2y^2+6}$;

f) $\mathbf{G}=(1,+\infty)$; $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$;

g) $\mathbf{G}=(3,+\infty)$; $x*y=\sqrt{x^2y^2-9x^2-9y^2+90}$.

5. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G}=(-1,1)$; $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$;

b) $\mathbf{G}=(-2,1)$; $x*y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$;

c) $\mathbf{G}=(0,1)$; $x*y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$;

d) $\mathbf{G}=(1,2)$; $x*y=\dfrac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}$

e) $\mathbf{G}=\left\{x+y\sqrt{3}\,\middle|\, x*y\in\mathbf{Q},\ x^2-3y^2=1\right\}$ faţă de înmulţire;

f) $\mathbf{G}=(0,1)\cup(1,+\infty)$, $x*y=x^{3\cdot\ln y}$;

g) $\mathbf{G}=(1,2)\cup(2,+\infty),\ x*y=(x-1)^{\frac{1}{2}\cdot\ln(y-1)}+1$.

6. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}\right| x,y\in\mathbf{Q},\, x\neq 0,\, y\neq 0\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

b) $\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| x\in\mathbf{Z}\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

c) $\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & x-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| x\in\mathbf{R}^*\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

d) $\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2x-2 & 2x-1 \end{pmatrix}\right| x\in\mathbf{Q}^*\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

e) $\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -8y & x-4y \end{pmatrix}\right| x,y\in\mathbf{Q},\, x\neq 0\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

f) $\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right| x,z\in\mathbf{R}^*,\, y\in\mathbf{R}\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

g) $\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}\right| x,y,z,u\in\mathbf{R},\, xu-yz=1\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor.

7. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G}=\left\{\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| x, y, \in \mathbf{R}, x^2-3y^2=1\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

b) $\mathbf{G}=\left\{\begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{5y}{2} & x \end{pmatrix} \middle| x, y, \in \mathrm{Q}, x^2-5y^2=1\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

c) $\mathbf{G}=\left\{\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

d) $\mathbf{G}=\left\{\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 3^x & 0 \\ 0 & 0 & 4^x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R}\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor;

e) $\mathbf{G}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R}\right\}$ faţă de înmulţirea matricelor;

f) $\mathbf{G}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x > 0\right\}$, faţă de înmulţirea matricelor;

g) $\mathbf{G}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R}\right\}$

faţă de înmulţirea matricelor.

8. Să se demonstreze, în fiecare din următoarele cazuri, că mulţimea **G** are o structură algebrică de grup faţă de legea de compoziţie specificată.

a) $\mathbf{G}=\left\{z=x+i\cdot y \mid x,y\in\mathbf{R}, |z|=1\right\}$

faţă de înmulţirea numerelor complexe;

b) $\mathbf{G}=\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; $x*y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)$

c) $\mathbf{G}=\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; $x*y=\arcsin(\sin x+\sin y)$.

9. Pe **A** = **R**–{1} se consideră legea „*“ definită astfel: $x*y=2xy-2x-2y+c, c\in\mathbf{R}$. Să se determine valorile lui c pentru care „$*$” defineşte pe **A** o structură de grup abelian.

10. Să se arate că grupul (**G**, ·) este abelian dacă şi numai dacă: $(xy)'=x'y'\,(\forall)\,x,y\in\mathbf{G}$, unde x', y' sunt simetricele lui *x*, *y*.

11. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţiile $a^2=b^2=(ab)^2$. Să se arate că $b^3=ab^3a$.

12. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţiile $a^4=b^4=e$ şi $ab=ba^2$. Să se arate că:

a) $a=e$ b) $b^2a^3=(ba)^2$.

13. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţiile $a^2b=b^2$ şi $b^2a=a^2$. Să se arate că:

a) $ab=ba^4$ b) $a^3=b^3$.

14. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţia $ab=ba^2$. Să se arate că:

a) $ab^2=b^2a^4$ b) $a^2b=ba^4$

c) $a^2b^2=\left(ba^2\right)^2a^2$ d) $a^3b=ba^6$.

15. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţiile $ba^2=ab$ şi $ba=ab^2$. Să se arate că $ab^3=ba^3=e$.

16. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţia $ba^2=ab$. Să se arate că $a^nb=ba^{2n}$ $(\forall)n\in\mathbf{N}, n\geq 2$.

17. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţiile $a^2=b^3=e$ şi $ba=ab^2$. Să se arate că:

a) $(ab)^2=(ba)^2=\left(ab^2\right)^2=e$ b) $\left(ab^2a\right)^2=aba$.

18. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţiile $(ab)^2=a^2=b^2$. Să se arate că: $a^2b^2=b^2a^2=e$.

19. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţiile $a^4=b^3=e$ şi $ab=ba^3$. Să se arate că:

a) $a^2b=ba^2$ b) $a^3b^2=b^2a^3$.

20. Fie (**G**, ·) un grup şi $a,b\in\mathbf{G}$ care verifică relaţiile $aba=b$ şi $bab=a$. Să se arate că:

a) $a^2=b^2$ b) $ba^2b=ab^2a$.

21. Fie $(\mathbf{G},\cdot)$ un grup şi $x,y\in\mathbf{G}$ astfel încât $xy^2=y^2x$ şi $xy^5=y^5x$ oricare ar fi $x,y\in\mathbf{G}$.

Să se arate că $(\mathbf{G},\cdot)$ este grup abelian.

22. Fie (**G**, ·) un grup şi $x,y\in\mathbf{G}$ care verifică relaţia $xyx=e$.

Să se arate că $x^6y=yx^6$.

1.1.3 MORFISM ŞI IZOMORFISM DE GRUPURI

1. Să se arate că:
a) $x * y = xy - x - y + 2$ determină pe intervalul (1, +∞) o structură de grup comutativ;
b) $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$ determină pe intervalul (3, +∞) o structură de grup comutativ;
c) funcţia $f : (1, +\infty) \to (3, +\infty),\ f(x) = x + 2$ determină un izomorfism între grupurile definite la punctele a) şi b).

2. Să se arate că:
a) $x * y = xy + 6x + 6y + 30$ determină pe intervalul (–6, +∞) o structură de grup comutativ;
b) $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$ determină pe intervalul (6, +∞) o structură de grup comutativ;
c) funcţia $f : (-6, +\infty) \to (6, +\infty),\ f(x) = x + 12$ determină un izomorfism între grupurile definite la punctele a) şi b).

3. Să se arate că:
a) $x * y = xy + x + y$ determină pe intervalul (-1, +∞) o structură de grup comutativ;
b) $x \circ y = xy - x - y + 2$ determină pe intervalul (1, +∞) o structură de grup comutativ;
c) funcţia $f : (-1, +\infty) \to (1, +\infty),\ f(x) = x + 2$ determină un izomorfism între grupurile definite la punctele a) şi b).

4. Să se arate că:
a) $x * y = xy - 5x - 5y + 30$ determină pe (5,+∞) o structură de grup comutativ;
b) funcţia $f : (0, +\infty) \to (5, +\infty),\ f(x) = x + 5$ determină un izomorfism între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul de la a).

5. a) Să se arate că legea de compoziţie

$$x * y=\sqrt{x^2y^2-4x^2-4y^2+20}$$

determină pe intervalul (2, +∞) o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că $f:(0,+\infty)\to(2,+\infty),\ f(x)=\sqrt{x+4}$ determină un izomorfism între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul de la punctul b).

6. a) Să se arate că legea de compoziţie

$$x * y=xy+2x+2y+2$$

determină pe intervalul $(-2,+\infty)$ o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că funcţia $f:\mathbf{R}\to(-2,+\infty),\ f(x)=e^x-2$, determină un izomorfism între grupul aditiv al numerelor reale şi grupul de la punctul a).

7. a) Să se arate că legea de compoziţie

$$x * y=\frac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}$$

determină pe intervalul (1, 2) o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că funcţia $f:(0,+\infty)\to(1,2),\ f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, determină un izomorfism între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul de la punctul a).

8. Să se arate că:

a) înmulţirea matricelor determină pe $\left\{\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\}$ o structură de grup;

b) grupul definit la punctul a) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi.

9. Să se arate că:

a) înmulţirea determină pe $\mathbf{G_1}=\left\{z=x+i\cdot y\,\middle|\ x,y\in\mathbf{R},|z|=1\right\}$ o structură de grup comutativ;

b) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in [0, 2\pi] \right\}$$

o structură de grup.
c) grupurile $\mathbf{G_1}$ şi $\mathbf{G_2}$ sunt izomorfe.

10. Să se arate că:
a) înmulţirea determină pe

$$\mathbf{G}_1 = \left\{ x + y\sqrt{3} \,\middle|\, x, y \in \mathbf{Q}, x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$$

o structură de grup comutativ;
b) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{Q}, x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$$

o structură de grup.
c) grupurile $\mathbf{G_1}$ şi $\mathbf{G_2}$ sunt izomorfe.

11. Să se arate că:
a) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R}^* \right\}$$

o structură de grup;
b) grupul de la a) este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale.

12. Să se arate că:
a) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R}^* \right\}$$

o structură de grup;
b) grupul de la a) este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale.

13. Să se arate că:
a) adunarea matricelor determină pe

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{Z} \right\}$$

o structură de grup;

b) funcţia $f : \mathbf{G} \to \mathbf{Q}^*$, $f(x) = (-1)^x$ determină un morfism de la grupul **G** la grupul (**Q*** , $\cdot$).

14. Să se arate că:

a) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R}^* \right\}$$

o structură de grup;

b) grupul de la a) este izomorf cu grupul (**R***,·).

15. Să se arate că:

a) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R} \right\}$$

o structură de grup;

b) grupul de la a) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

16. Să se arate că:

a) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R} \right\}$$

o structură de grup;

b) grupul de la a) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

17. Să se arate că:

a) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln x\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| x>0\right\}$$

o structură de grup;

b) grupul de la a) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale pozitive.

18. Să se arate că:

a) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 3^x & 0\\ 0 & 0 & 4^x\end{pmatrix}\right| x\in\mathbf{R}\right\}$$

o structură de grup;

b) grupul de la a) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

19. Să se arate că:

a) înmulţirea matricelor determină pe

$$\mathbf{G}=\left\{\left.\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| x\in\mathbf{R}\right\}$$

o structură de grup;

b) grupul de la a) este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

20. Fie grupurile $(\mathbf{R},+),(\mathbf{C}^*,\cdot)$. Să se arate că funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}^*,\ f(x)=\cos 2\pi x+i\cdot\sin 2\pi x$ este morfism de grupuri.

21. Să se arate că:

a) $x*y=x+y-2$ determină pe $\mathbf{Z}$ o structură de grup abelian;

b) $x\circ y=x+y-1$ determină pe $\mathbf{Z}$ o structură de grup abelian;

c) între grupurile de la a) şi b) există un izomorfism de forma $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z},\ f(x)=x+a,\ a\in\mathbf{R}$.

22. Să se arate că:
a) $x*y=xy-x-y+2$ determină pe $\mathbf{G_1}=(1,+\infty)$ o structură de grup abelian;
b) $x\circ y=xy-3x-3y+12$ determină pe $\mathbf{G_2}=(3,+\infty)$ o structură de grup abelian;
c) între grupurile de la a) şi b) există un izomorfism de forma $f:(1,+\infty)\to(3,+\infty),\ f(x)=x+a,\ a\in\mathbf{R}$.

23. Să se arate că:
a) $x*y=xy+2x+2y+2$ determină pe $\mathbf{G_1}=(-2,+\infty)$ o structură de grup abelian;
b) $x\circ y=xy-2x-2y+6$ determină pe $\mathbf{G_2}=(2,+\infty)$ o structură de grup abelian;
c) între grupurile de la a) şi b) există un izomorfism de forma $f:(-2,+\infty)\to(2,+\infty),\ f(x)=x-a,\ a\in\mathbf{R}$.

24. Să se arate că:
a) $x*y=\sqrt{x^2y^2-9x^2-9y^2+90}$ determină pe $(3,+\infty)$ o structură de grup abelian;
b) între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul de la punctul a) există un izomorfism de forma:

$$f:(0,+\infty)\to(3,+\infty),\ f(x)=\sqrt{x+a},\ a\in\mathbf{R}.$$

25. Să se arate că:
a) $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ determină pe $(-1,1)$ o structură de grup abelian;
b) $x\circ y=\dfrac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}$ determină pe $(1,2)$ o structură de grup abelian;

c) între grupurile de la a) şi b) există un izomorfism de forma $f(x)=\frac{-x+a}{2}$, $a\in\mathbf{R}$.

26. Să se arate că:

a) $x*y=\frac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}$ determină pe $\mathbf{G_1}$= (1, 2) o structură de grup abelian;

b) între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul de la punctul a) există un izomorfism de forma:

$$f:(0,+\infty)\to(1,2),\ f(x)=\frac{x+a}{x+1},\ a\in\mathbf{R}.$$

27. Să se arate că:

a) $x*y=xy-10x-10y+110$ determină pe (10, +∞) o structură de grup abelian;

b) între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive şi grupul de la a) există un izomorfism de forma:

$$f:(0,+\infty)\to(10,+\infty),\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbf{R}.$$

28. Să se arate că:

a) $x*y=xy-2x-2y+6$ determină pe (2, +∞) o structură de grup abelian;

b) între grupul aditiv al numerelor reale şi grupul de la a) există un izomorfism $f:\mathbf{R}\to(2,+\infty),\ f(x)=e^{ax}+b,\ a,b\in\mathbf{R}$.

29. Să se arate că:

a) $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$ determină pe (1, +∞) o structură de grup abelian;

b) în tre grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive şi grupul de la a) există un izomorfism:

$$f:(0,+\infty)\to(1,+\infty),\ f(x)=\sqrt{ax+b},\ a,b\in\mathbf{R}.$$

30. Să se arate că:

a) $x * y = xy - 5x - 5y + 30$ determină pe (5, +∞) o structură de grup abelian;
b) între grupul de la a) şi grupul aditiv al numerelor reale există un izomorfism de forma:

$$f : (5, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \ln(ax + b),\ a, b \in \mathbf{R}.$$

31. Să se arate că funcţia $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q},\ f(k) = (-1)^k$ defineşte un morfism de la grupul (**Z**, +) la grupul (**Q***, $\circ$).

32. Să se arate că grupurile ($\mathbf{R}_+^*$, ·) şi (**R**, +) sunt izomorfe.

33. Fie (**G**, ·) un grup finit având proprietatea că funcţia $f : \mathbf{G} \to \mathbf{G},\ f(x) = x^2$ este automorfism de grup.

Să se arate că grupul (**G**, ·) are un număr impar de elemente.

34. Să se determine automorfismele grupului (**Z**, +).

35. Să se arate că grupurile (**Z**, +) şi (**Q**, +) nu sunt izomorfe.

36. Să se arate că grupurile (**Q**, +) şi (**R**, +) nu sunt izomorfe.

37. Să se arate că grupurile (**Q***, ·) şi (**Q**, +) nu sunt izomorfe.

38. Să se arate că grupurile (**Q***, ·) și (**R***, ·) nu sunt izomorfe.

CUPRINS

	Enunţuri	Rezolvări
1. Elemente de algebră	**5**	**119**
1.1 Grupuri	**5**	**119**
1.1.1 Lege de compoziție internă	**5**	**119**
1.1.2 Grup, exemple:grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, grupul Z_n	**13**	**122**
1.1.3 Morfism și izomorfism de grupuri . .	**19**	**125**
1.1.4 Subgrupuri	**27**	**128**
1.2 Inele și corpuri	**29**	**129**
1.2.1 Inele	**29**	**129**
1.2.2 Corpuri	**31**	**130**
1.2.3 Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri	**32**	**130**
1.3 Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$	**35**	**132**
1.3.1 Forma algebrică a unui polinom . . .	**35**	**132**
1.3.2 Teorema împărțirii cu rest, împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner	**36**	**132**
1.3.3 Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bezout, C.M.M.D.C. și C.M.M.M.C. al unor polinoame, descompunerea unui polinom în factori ireductibili	**38**	**133**
1.3.4 Rădăcini ale polinoamelor, relațiile lui Viete pentru polinoame de grad cel mult 4	**43**	**134**
1.3.5 Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ecuații binome, ecuații bipătrate, ecuații reciproce	**49**	**137**
1.3.6 Inelul(Corpul) claselor de resturi Z_p	**53**	**140**
1.4 Teste de evaluare	**64**	**143**
Testul 1	**64**	**143**
Testul 2	**65**	**143**
Testul 3	**66**	**144**
2. Elemente de analiză matematică	**67**	**145**
2.1 Primitive	**67**	**145**
2.1.1 Primitivele unei funcții	**67**	**145**
2.1.2 Metoda de integrare prin părți .	**73**	**148**
2.1.3 Metoda de integrare prin schim-		

barea de variabilă	77	150
2.2 Integrala definită	91	159
2.2.1 Diviziuni ale unui interval $[a, b]$, sume Riemann, definiția integrabilității unei funcții pe un interval $[a, b]$, clase de funcții integrabile	91	159
2.2.2 Formula lui Leibniz-Newton, proprietăți ale integralei definite, proprietatea de medie, teorema de medie	93	159
2.2.3 Metode de calcul ale integralelor definite, integrarea prin părți, integrarea prin schimbarea de variabilă	96	161
2.3 Aplicații ale integralei definite	105	169
2.4 Teste de evaluare	107	170
Testul 1	107	170
Testul 2	108	171
3. Teste finale de evaluare	109	172
Testul 1	109	172
Testul 2	110	173
Testul 3	111	173
Testul 4	112	174
Testul 5	113	175
Testul 6	114	176
Testul 7	115	177
Testul 8	116	178
Testul 9	117	178
Testul 10	118	179