

2.2 PROGRESII ARITMETICE

1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir dat prin termenul general:

a) $a_n = 2n + 1$; b) $a_n = -3n + 1$; c) $a_n = 3n - 7$.

Să se demonstreze în fiecare caz în parte că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică și să se determine primul termen și rația.

2. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ știind că:

a) $a_4 = 7, a_8 = 15$; b) $a_1 + a_5 = 10, a_3 + a_8 = 10$;

c) $a_1 + a_3 = 8, S_4 = 22$; d) $a_4 + a_5 = 23, S_3 = 12$;

e) $a_1 + a_6 = 0, S_6 = 0$; f) $2 \cdot (a_1 + a_3) = a_7, S_3 = 15$;

g) $S_4 = 10, S_6 = 21$; h) $S_4 = -28, S_{11} = 0$.

3. Să se determine primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ știind că:

a) $\begin{cases} a_2 + a_5 = \frac{3}{2} a_6 \\ 2a_8 - a_3 - a_6 = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 22 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 33 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} a_8 + a_9 - a_7 = 2a_5 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_{10} \end{cases}$; d) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 18 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = a_7 + 2 \\ a_1 + a_2 + a_4 = a_6 + 1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} a_3 + a_6 = 0 \\ a_1 + a_4 + a_5 + a_8 = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} a_2 + 2a_3 = 21 \\ a_4 + a_5 = a_2 + a_7 \end{cases}$; h) $\begin{cases} a_2 a_3 = a_1 a_7 \\ a_1 a_5 = 2a_6 - a_3 + 2 \end{cases}$.

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică, Să se arate că șirul

$(b_n)_{n \geq 1}$ al cărui termen general este dat de formula:

a) $b_n = 2 \cdot a_n$; b) $b_n = 3 + a_n$; c) $b_n = a_{2n}$;

d) $b_n = 5 \cdot a_{2n}$; e) $b_n = -1 + a_{2n}$; f) $b_n = a_n + a_{2n}$

formează o progresie aritmetică.

5. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Să se arate că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ al cărui termen general este dat de formula:

a) $b_n = \alpha \cdot a_n^2$; b) $b_n = a_n^2 + a_n$; c) $b_n = a_n^2 + \alpha$;

d) $b_n = a_{2n}^2$; e) $b_n = a_{2n}^2 + \alpha$; f) $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$

nu formează o progresie aritmetică.

6. Să se demonstreze că numerele:

a) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$; b) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$; c) $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$;

d) $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{21}$ e) $\sqrt{3}, \sqrt{15}, \sqrt{29}$ f) $\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{15}$

nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

7. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + 3 + 5 + \dots + x = 100$;

b) $2 + 5 + 8 + \dots + x = 155$;

c) $2 + 6 + 10 + \dots + 2x = 200$;

d) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+30) = 620$

e) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2x = 630$.

8. Să se determine progresia aritmetică cu proprietatea că suma primilor n termeni ai săi este:

a) $S_n = 5n^2 + 6n$; b) $S_n = n^2 + n$; c) $S_n = 2n^2 + n$;

d) $S_n = 3n^2 + 4n$; d) $S_n = n^2 - n$; f) $S_n = n^2 + 10n$.

9. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = n$ și $a_n = m$, $m \neq n$ să se calculeze a_p , $p \in \mathbf{N}^*$.

10. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_{m+n} = 1000$ și $a_{m-n} = 100$ să se determine a_m , a_n , a_p , S_m , S_n , S_p .

11. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = \frac{1}{n}$ și $a_n = \frac{1}{m}$, $m \neq n$ să se calculeze a_p, S_p, S_m .

12. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = m^2$ și $a_n = n^2$, $m \neq n$ să se calculeze a_p, S_p, S_m, S_n .

13. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = n^2$ și $a_n = m^2$, $m \neq n$ să se calculeze a_p, S_p, S_m, S_n .

14. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = m$ și $a_n = n$, $m \neq n$, atunci $a_p = p$.

15. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi. Să se demonstreze că dacă $S_m = m$ și $S_n = n$, $m \neq n$ atunci:

$$S_p = p \quad (\forall) p \in \mathbf{N}^*.$$

16. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi. Să se demonstreze că dacă $S_m = m^2$ și $S_n = n^2$, $m \neq n$ atunci are loc egalitatea:

$$S_k = k^2 \quad (\forall) k \in \mathbf{N}^*.$$

17. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ avem: $a_1 = 1$ și $\frac{S_m}{m^2} = \frac{S_n}{n^2}$. Să se determine progresia.

18. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi. Să se arate că dacă $\frac{S_m}{m^2} = \frac{S_n}{n^2}$, atunci:

$$\frac{a_m}{2m-1} = \frac{a_n}{2n-1}, \text{ unde } m \neq n.$$

19. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația nenulă. Știind că suma primilor n termeni ai progresiei este jumătate din suma următorilor n termeni, să se calculeze S_{3n} / S_n .

20. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi. Să se arate că:

$$\frac{S_k}{k}(p-q) + \frac{S_p}{p}(q-k) = \frac{S_q}{q}(p-k) \quad (\forall) k, p, q \in \mathbf{N}^*.$$

21. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi. Să se arate că are loc relația:

$$3S_n - 3S_{2n} + S_{3n} = 0.$$

22. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale, iar $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (\forall) n > 0$. Să se arate că dacă $S_n = an^2 + bn$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ sunt date, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică.

23. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale, iar $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (\forall) n > 0$. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $S_n = an^2 + bn + c$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă $c = 0$.

24. Dacă a, b, c, d sunt în progresie aritmetică, atunci:

a) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 + \frac{1}{2}(b-d)(a+b+c+d);$

b) $a^3 + d^3 = b^3 + c^3 + 3(b-c)(ab-cd).$

25. Dacă a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci:

a) $a^2 + ab + b^2; a^2 + ac + c^2; b^2 + bc + c^2$ sunt tot în progresie aritmetică;

b) $(a + 2b)(a + 2c)(b - c) + (b + 2a)(b + 2c)(a - c) = 0$;

c) $a^2(b + c); b^2(c + a); c^2(a + b)$ sunt tot în progresie aritmetică.

26. Dacă numerele: $a^2 - bc; b^2 - ac; c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică sau $a + b + c = 0$.

27. Dacă numerele: $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică.

28. Dacă numerele: $a^2 + 2bc; b^2 + 2ca; c^2 + 2ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{b-c}$ sunt în progresie aritmetică.

29. Dacă numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $\frac{a}{b+c}; \frac{b}{c+a}; \frac{c}{a+b}$ sunt în progresie aritmetică.

30. Dacă numerele a^2, b^2, c^2, d^2 sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$a \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}}, b \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}}, c \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}}, d \cdot \sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}}$$

sunt în progresie aritmetică și reciproc.

31. Dacă a, b, c, d sunt în progresie aritmetică, atunci:
 $abcd + (b - a)^4$ este un pătrat perfect.

32. Să se arate că dacă: $a > 0, b > 0, c > 0$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

33. Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt termenii unei progresii aritmetice de rație r , să se calculeze suma:

a) $S = a_1 + (a_1 + a_2) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$;

b) $S = a_1^2 + a_2(a_1 + a_2) + \dots + a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$;

c) $S = a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n$;

d) $S = a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n$;

e) $S = a_1a_2 \dots a_k + a_2a_3 \dots a_{k+1} + \dots + a_{n+1}a_{n+2}a_{n+k}$

f) $S = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$;

g) $S = \frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 a_3^2} + \dots + \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2}$;

h) $S = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$;

i) $S = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}$.

34. Dacă a_1, a_2, \dots, a_n formează o progresie aritmetică de rație $r \neq 0$, atunci are loc egalitatea:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + \frac{n(n^2 - 1)r}{12}.$$

35. Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt termenii unei progresii aritmetice de rație $r > 0$, să se pună sub forma cea mai simplă produsul:

$$P_n = \left(1 - \frac{r^2}{a_2^2}\right) \left(1 - \frac{r^2}{a_3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{r^2}{a_n^2}\right).$$

36. Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt termenii unei progresii aritmetice de rație $r > 0$ și $a_1 > 0$, să se pună sub forma cea mai simplă produsul:

$$P_n = \frac{a_2^3 - r^3}{a_2^3 + r^3} \cdot \frac{a_3^3 - r^3}{a_3^3 + r^3} \cdots \frac{a_{n+1}^3 - r^3}{a_{n+1}^3 + r^3}.$$

37. Dacă $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$ sunt în progresie aritmetică și $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{2n} < a_{2n+1}$, atunci:

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}} < \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} < \frac{n}{a_0 a_{2n}}.$$

38. Dacă S_1, S_2, \dots, S_n sunt sumele a n termeni ale unor progresii aritmetice ale căror primi termeni sunt respectiv $1, 2, 3, \dots, n$ și ale căror rații sunt $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$, să se calculeze suma: $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

39. Să se determine progresia aritmetică a_1, a_2, \dots, a_n astfel încât:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{n(6n^2 - 3n - 1)r}{2}.$$

40. Într-o progresie aritmetică suma primilor n termeni este egală cu suma primilor m termeni ($m \neq n$). Să se demonstreze că suma primilor $m + n$ termeni este nulă.

CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	209
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	209
1.1.1 Numere reale	5	209
1.1.2 Operații algebrice cu numere reale	11	211
1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere	16	212
1.1.4 Ordonarea numerelor reale	19	213
1.1.5 Modulul unui număr real	20	213
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	23	-
1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	24	215
1.1.8 Operații cu intervale de numere reale	29	219
1.1.9 Inegalități	30	220
1.2 Elemente de logică matematică	38	223
1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori	38	223
1.2.2 Operații logice elementare	39	-
1.2.3 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi	40	223
1.3 Tipuri de raționamente logice	50	224
1.3.1 Metoda inducției matematice	50	224
1.3.2 Probleme de numărare	52	226
1.4 Teste de evaluare	53	226
Testul 1	53	226
Testul 2	54	227
Testul 3	55	227
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șir)	56	228
2.1 Șiruri	56	228
2.2 Progresii aritmetice	57	228
2.3 Progresii geometrice	64	232
2.4 Teste de evaluare	69	234
Testul 1	69	234
Testul 2	69	234
3. Funcții, lecturi grafice	71	235
3.1 Reper cartezian, produs cartezian, drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m, m \in \mathbf{R}$	71	235
3.2 Noțiunea de funcție, funcții egale. Imagine.		

Grafic. Restricție	73	235
3.3 Funcții numerice	75	235
3.4 Componerea funcțiilor	81	237
3.5 Teste de evaluare	83	238
Testul 1	83	238
Testul 2	84	238
4. Funcția de gradul I	85	239
4.1 Ecuația de gradul I	85	239
4.2 Funcția afină	89	239
4.3 Monotonia și semnul funcției de gradul I . . .	91	240
4.4 Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I	96	242
4.5 Teste de evaluare	99	242
Testul 1	99	242
Testul 2	100	243
5. Funcția de gradul al doilea	101	243
5.1 Ecuația de gradul al doilea. Rezolvare. Relațiile lui Viete. Rezolvarea sistemelor simetrice	101	243
5.2 Funcția de gradul al doilea. Grafic. Monotonie. Semn	111	247
5.3 Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă. Rezolvarea sistemelor de ecuații de grad superior.	119	250
5.4 Teste de evaluare	127	253
Testul 1	127	253
Testul 2	128	254
Testul 3	129	-
6. Vectori în plan	130	255
6.1 Segmente orientate	130	255
6.2 Vectori. Operații cu vectori	133	257
6.3 Teste de evaluare	137	259
Testul 1	137	259
7. Coliniaritate, concurență, paralelism.		
Calcul vectorial în geometria plană . .	138	260
7.1 Vectori coliniari	138	260
7.2 Vectorul de poziție al unui punct	140	262
7.3 Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales	141	262
7.4 Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi	144	267

7.5 Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi, relația lui Sylvester, concurența înălțimilor	145	268
7.6 Teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva	146	269
7.7 Teste de evaluare	147	271
Testul 1	147	271
Testul 2	148	272
8. Elemente de trigonometrie	149	274
8.1 Unități de măsură pentru unghiuri și arce.	149	274
8.2 Funcții trigonometrice în triunghiul dreptunghic. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	153	276
8.3 Cercul trigonometric, definirea funcțiilor trigonometrice, domenii de definiție	156	278
8.4 Periodicitate, paritate, imparitate și graficul funcțiilor trigonometrice	157	279
8.5 Formule trigonometrice	159	280
8.6 Identități trigonometrice	172	291
8.7 Expresii calculabile prin logaritmi	178	298
8.8 Expresii care nu depind de parametri	180	301
8.9 Inegalități	183	305
8.10 Teste de evaluare	187	309
Testul 1	187	309
Testul 2	188	310
9. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană	189	312
9.1 Produsul scalar a doi vectori	189	312
9.2 Aplicații ale trigonometriei în geometrie	193	317
9.3 Teste de evaluare	200	332
Testul 1	200	332
10 Teste finale de evaluare	201	-
Testul 1	201	-
Testul 2	202	-
Testul 3	203	-
Testul 4	204	-
Testul 5	205	-
Testul 6	206	-
Testul 7	207	-
Testul 8	208	-

