2.2 PROGRESII ARITMETICE

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir dat prin termenul general:

a) $a_n = 2n+1$; b) $a_n = -3n+1$; c) $a_n = 3n-7$.

Să se demonstreze în fiecare caz în parte că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică şi să se determine primul termen şi raţia.

2. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că:

a) $a_4 = 7, a_8 = 15$; b) $a_1 + a_5 = 10, a_3 + a_8 = 10$;

c) $a_1 + a_3 = 8, S_4 = 22$; d) $a_4 + a_5 = 23, S_3 = 12$;

e) $a_1 + a_6 = 0, S_6 = 0$; f) $2\cdot(a_1 + a_3) = a_7, S_3 = 15$;

g) $S_4 = 10, S_6 = 21$; h) $S_4 = -28, S_{11} = 0$.

3. Să se determine primul termen şi raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că:

a) $\begin{cases} a_2 + a_5 = \dfrac{3}{2}a_6 \\ 2a_8 - a_3 - a_6 = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 22 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 33 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} a_8 + a_9 - a_7 = 2a_5 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_{10} \end{cases}$; d) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 18 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = a_7 + 2 \\ a_1 + a_2 + a_4 = a_6 + 1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} a_3 + a_6 = 0 \\ a_1 + a_4 + a_5 + a_8 = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} a_2 + 2a_3 = 21 \\ a_4 + a_5 = a_2 + a_7 \end{cases}$; h) $\begin{cases} a_2 a_3 = a_1 a_7 \\ a_1 a_5 = 2a_6 - a_3 + 2 \end{cases}$.

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ al cărui termen general este dat de formula:

a) $b_n = 2\cdot a_n$; b) $b_n = 3 + a_n$; c) $b_n = a_{2n}$;

d) $b_n = 5\cdot a_{2n}$; e) $b_n = -1 + a_{2n}$; f) $b_n = a_n + a_{2n}$

formează o progresie aritmetică.

5. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică. Să se arate că şirul $(b_n)_{n\ge1}$ al cărui termen general este dat de formula:

a) $b_n = \alpha \cdot a_n^2$; b) $b_n = a_n^2 + a_n$; c) $b_n = a_n^2 + \alpha$;

d) $b_n = a_{2n}^2$; e) $b_n = a_{2n}^2 + \alpha$; f) $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$

nu formează o progresie aritmetică.

6. Să se demonstreze că numerele:

a) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$; b) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$; c) $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$;

d) $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{21}$ e) $\sqrt{3}, \sqrt{15}, \sqrt{29}$ f) $\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{15}$

nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

7. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $1+3+5+\cdots+x=100$;

b) $2+5+8+\cdots+x=155$;

c) $2+6+10+\cdots+2x=200$;

d) $x+(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+30)=620$

e) $x+(x+1)+(x+2)+\cdots+2x=630$.

8. Să se determine progresia aritmetică cu proprietatea că suma primilor n termeni ai săi este:

a) $S_n = 5n^2+6n$; b) $S_n = n^2+n$; c) $S_n = 2n^2+n$;

d) $S_n = 3n^2+4n$; d) $S_n = n^2-n$; f) $S_n = n^2+10n$.

9. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = n$ şi $a_n = m, m \ne n$ să se calculeze a_p, $p \in \mathbf{N}^*$.

10. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_{m+n} = 1000$ şi $a_{m-n} = 100$ să se determine $a_m, a_n, a_p, S_m, S_n, S_p$.

11. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = \frac{1}{n}$ şi $a_n = \frac{1}{m}, m \neq n$ să se calculeze a_p, S_p, S_{mn}.

12. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = m^2$ şi $a_n = n^2, m \neq n$ să se calculeze a_p, S_p, S_m, S_n.

13. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = n^2$ şi $a_n = m^2, m \neq n$ să se calculeze a_p, S_p, S_m, S_n.

14. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = m$ şi $a_n = n, m \neq n$, atunci $a_p = p$.

15. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi.
Să se demonstreze că dacă $S_m = m$ şi $S_n = n, m \neq n$ atunci:

$$S_p = p \left(\forall\right) p \in \mathbf{N}^*.$$

16. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi.
Să se demonstreze că dacă $S_m = m^2$ şi $S_n = n^2, m \neq n$ atunci are loc egalitatea:

$$S_k = k^2 \left(\forall\right) k \in N^*.$$

17. Într-o progresie aritmetică $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ avem: $a_1 = 1$ şi $\frac{S_m}{m^2} = \frac{S_n}{n^2}$. Să se determine progresia.

18. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi. Să se arate că dacă $\frac{S_m}{m^2} = \frac{S_n}{n^2}$, atunci:

$\frac{a_m}{2m-1}=\frac{a_n}{2n-1}$, unde $m \neq n$.

19. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia nenulă. Ştiind că suma primilor n termeni ai progresiei este jumătate din suma următorilor n termeni, să se calculeze S_{3n}/S_n.

20. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi. Să se arate că:

$$\frac{S_k}{k}(p-q)+\frac{S_p}{p}(q-k)=\frac{S_q}{q}(p-k)\,(\forall)k,\,p,\,q\in\mathbf{N}^*.$$

21. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, iar S_k suma primilor k membri ai săi. Să se arate că are loc relaţia:

$$3S_n-3S_{2n}+S_{3n}=0.$$

22. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, iar $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\,(\forall)n>0$. Să se arate că dacă $S_n=an^2+bn$, unde $a,b\in\mathbf{R}$ sunt date, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ formează o progresie aritmetică.

23. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, iar $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\,(\forall)n>0$. Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât $S_n=an^2+bn+c$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ formează o progresie aritmetică dacă şi numai dacă $c=0$.

24. Dacă a,b,c,d sunt în progresie aritmetică, atunci:

a) $a^2+c^2=b^2+d^2+\frac{1}{2}(b-d)(a+b+c+d)$;

b) $a^3+d^3=b^3+c^3+3(b-c)(ab-cd)$.

25. Dacă a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci:
a) $a^2+ab+b^2; a^2+ac+c^2; b^2+bc+c^2$ sunt tot în progresie aritmetică;
b) $(a+2b)(a+2c)(b-c)+(b+2a)(b+2c)(a-c)=0$;
c) $a^2(b+c); b^2(c+a); c^2(a+b)$ sunt tot în progresie aritmetică.

26. Dacă numerele: $a^2-bc; b^2-ac; c^2-ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică sau $a+b+c=0$.

27. Dacă numerele: $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică.

28. Dacă numerele: $a^2+2bc; b^2+2ca; c^2+2ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{b-c}$ sunt în progresie aritmetică.

29. Dacă numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $\frac{a}{b+c}; \frac{b}{c+a}; \frac{c}{a+b}$ sunt în progresie aritmetică.

30. Dacă numerele a^2, b^2, c^2, d^2 sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele:

$$a\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}}, b\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}}, c\cdot\sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}}, d\cdot\sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}}$$

sunt în progresie aritmetică şi reciproc.

31. Dacă a, b, c, d sunt în progresie aritmetică, atunci: $abcd+(b-a)^4$ este un pătrat perfect.

32. Să se arate că dacă: $a>0, b>0, c>0$ sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

33. Dacă $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt termenii unei progresii aritmetice de raţie r, să se calculeze suma:

a) $S=a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_n)$;

b) $S=a_1^2+a_2(a_1+a_2)+\cdots+a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$;

c) $S=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n$;

d) $S=a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n$;

e) $S=a_1a_2\cdots a_k+a_2a_3\cdots a_{k+1}+\cdots+a_{n+1}a_{n+2}a_{n+k}$

f) $S=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$;

g) $S=\dfrac{a_1+a_2}{a_1^2a_2^2}+\dfrac{a_2+a_3}{a_2^2a_3^2}+\cdots+\dfrac{a_n+a_{n+1}}{a_n^2a_{n+1}^2}$;

h) $S=\dfrac{1}{a_1a_2a_3}+\dfrac{1}{a_2a_3a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$;

i) $S=\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$.

34. Dacă $a_1, a_2, \cdots, a_n$ formează o progresie aritmetică de raţie $r \neq 0$, atunci are loc egalitatea:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+\frac{n(n^2-1)r}{12}.$$

35. Dacă $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt termenii unei progresii aritmetice de raţie $r > 0$, să se pună sub forma cea mai simplă produsul:

$$P_n = \left(1 - \frac{r^2}{a_2^2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{a_3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{r^2}{a_n^2}\right).$$

36. Dacă $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt termenii unei progresii aritmetice de raţie $r > 0$ şi $a_1 > 0$, să se pună sub forma cea mai simplă produsul:

$$P_n = \frac{a_2^3 - r^3}{a_2^3 + r^3} \cdot \frac{a_3^3 - r^3}{a_3^3 + r^3} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{n+1}^3 - r^3}{a_{n+1}^3 + r^3}.$$

37. Dacă $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2n}, a_{2n+1}$ sunt în progresie aritmetică şi $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_{2n} < a_{2n+1}$, atunci:

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}} < \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} < \frac{n}{a_0 a_{2n}}.$$

38. Dacă $S_1, S_2, \cdots, S_n$ sunt sumele a n termeni ale unor progresii aritmetice ale căror primi termeni sunt respectiv $1, 2, 3, \cdots, n$ şi ale căror raţii sunt $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$, să se calculeze suma: $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$.

39. Să se determine progresia aritmetică $a_1, a_2, \cdots, a_n$ astfel încât:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{n(6n^2 - 3n - 1)r}{2}.$$

40. Într-o progresie aritmetică suma primilor n termeni este egală cu suma primilor m termeni ($m \neq n$). Să se demonstreze că suma primilor $m+n$ termeni este nulă.

CUPRINS