3. Mulțimea numerelor întregi

3.1 Număr întreg, opusul unui număr întreg, reprezentarea pe axă a numerelor întregi, valoarea absolută(modulul)

1. Mulțimea numerelor întregi este formată din numerele întregi pozitive (numere naturale), numerele întregi negative (adică numerele $-1, -2, -3, \cdots$) și numărul 0 și se notează cu **Z**.

Deci $\mathbf{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

Exemple. a) Numerele întregi mai mari decât -3 și mai mici decât 2 sunt: $-2, -1, 0, 1$.

b) Mulțimea: $\{x \in \mathbf{Z} | -4 \leq x < 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

2. Orice număr natural este număr întreg pozitiv și atunci rezultă că mulțimea numerelor naturale este inclusă în mulțimea numerelor întregi, adică $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

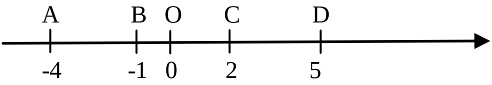
3. Numerele întregi se reprezintă pe axa numerelor astfel:

a) numărul 0 corespunde originii O a axelor de coordonate;

b) numerele întregi pozitive corespund punctelor ce se găsesc în dreapta originii, astfel încât distanța dintre două puncte consecutive să fie egală cu unitatea de măsură;

c) numerele întregi negative corespund punctelor ce se găsesc în stânga originii, astfel încât distanța dintre două puncte consecutive să fie egală cu unitatea de măsură.

Exemplu. Numerele întregi -4, -1, 0, 2, 5 se reprezintă astfel:



4. Fiind dat numărul a, întreg și diferit de 0, numim opusul lui a numărul $-a$, obținut prin schimbarea semnului lai a.

Exemple. Opusul lui 3 este -3, opusul lui -5 este 5, iar opusul lui 0 este 0.

5. Valoarea absolută sau modulul unui număr întreg x, se notează $|x|$ și se definește:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Z}, x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x \in , x < 0 \end{cases}.$$

Exemple. $|5| = 5, |-2| = 2$.

Proprietățile modulului unui număr întreg

a) $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$;

b) $|x| = a$ dacă și numai dacă $x = \pm a$;

c) $|-x| = |x|$ oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$.

Aplicații.

a) Determinați $x \in \mathbf{Z}$, astfel încât $|x - 2| = 0$.

Soluție. $|x - 2| = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

b) Determinați $x \in \mathbf{Z}$, astfel încât $|x| = 3$.

Soluție. $|x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$.

c) Determinați $x \in \mathbf{Z}$, astfel încât $|x - 1| = 5$.

Soluție. $|x - 1| = 5 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 5 \Leftrightarrow x - 1 = 5$ și $x - 1 = -5 \Leftrightarrow x = 6$ și $x = -4$.

3.2 Compararea și ordonarea numerelor întregi

Pentru compararea a două numere întregi folosim următoarele reguli:

a) $x > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{N}^*$;

b) $x < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$;

c) $x < y$ oricare ar fi $x \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$ și $y \in \mathbf{N}$.

d) $x < y$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{Z}$, astfel încât $|x| > |y|$.

Exemple. a) $0 < 3$ conform a); $-2 < 0$ conform b); $-3 < 7$ conform c); $-8 < -2$, deoarece $|-8| > |-2|$ și se aplică d).

Pentru ordonarea unui șir de numere întregi se procedează astfel:

a) se formează o grupă cu numerele întregi negative și una cu numerele întregi pozitive;

b) se ordonează numerele întregi negative folosind d);

c) se ordonează numerele întregi pozitive;

d) se pun cap la cap cele două grupe de numere întregi.

Exemplu. Se ordonează numerele $7, -2, -5, 3, -1$ astfel: Numerele întregi negative sunt: $-2, -5, -1$, care ordonate crescător devin: $-5, -2, -1$, iar cele întregi pozitive sunt: 7, 3, care ordonate crescător devin: 3, 7. Puse cap la cap cele două grupe formează un șir crescător și anume:

$$-5, -2, -1, 3, 7.$$

3.3 Adunarea numerelor întregi

1. Fiind date două numere întregi a și b, suma lor se notează $a + b$ și se calculează astfel:

a) dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci $a + b = a + b$;

b) dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci $a + b = -(|a| + |b|)$;

c) dacă $a > 0$ și $b < 0$, atunci $a + b = \begin{cases} a - |b|, & \text{dacă } a > |b| \\ -(|b| - a), & \text{dacă } a < |b| \end{cases}$

d) dacă $a < 0$ și $b > 0$, atunci $a + b = \begin{cases} b - |a|, & \text{dacă } |a| < b \\ -(|a| - b), & \text{dacă } |a| > b \end{cases}$

Exemple. a) Dacă $a = 3, b = 5 \Rightarrow a + b = 3 + 5 = 9$;

b) Dacă $a = -2, b = -7 \Rightarrow a + b = -(|a| + |b|) = -(2 + 7) =$
$= -9$;

c) Dacă $a = -3, b = 8 \Rightarrow a + b = b - |a| = 8 - 3 = 5$;

d) Dacă $a = 10, b = -5 \Rightarrow a + b = a - |b| = 10 - 5 = 5$.

2. **Proprietățile** adunării numerelor întregi

a) Comutativitatea: $x + y = y + x \ (\forall) x, y \in \mathbf{Z}$;

b) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z) \ (\forall) x, y, z \in \mathbf{Z}$;

c) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x \ (\forall) x \in \mathbf{Z}$.

d) Element opus: $a + (-a) = (-a) + a = 0 \ (\forall) a \in \mathbf{Z}$.

Alte proprietăți:

a) $(\forall) x, y \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x = y$ și $(\forall) z \in \mathbf{Z}$, atunci are loc egalitatea: $x + z = y + z$.

b) $(\forall) x, y \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x \leq y$ și $(\forall) z \in \mathbf{Z}$, atunci are loc egalitatea: $x + z \leq y + z$.

c) $(\forall)x, y, z, u \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x = y$ și $z = u$**,** atunci are loc egalitatea: $x + z = y + u$.
d) $(\forall)x, y, z, u \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x \leq y$ și $z \leq u$**,** atunci are loc egalitatea: $x + z \leq y + u$.

3.4 Scăderea numerelor întregi

Fiind date două numere întregi a și b, diferența lor se notează $a - b$ și se calculează astfel: $a - b = a + (-b)$.

Exemple. a) $7 - 5 = 7 + (-5) = 7 - |-5| = 2$.
b) $2 - 8 = 2 + (-8) = -(|b| - a) = -(8 - 2) = -6$.
c) $-3 - 9 = (-3) + (-9) = -(|a| + |b|) = -(3 + 9) = -12$.

3.5 Înmulțirea numerelor întregi

1. Fiind date două numere întregi a și b, produsul lor se notează $a \cdot b$ și se calculează astfel:
a) dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $a \cdot b = 0$;
b) dacă $a > 0$ și $b > 0$ sau $a < 0$ și $b < 0$, atunci:
$$a \cdot b = |a| \cdot |b|;$$
c) dacă $a > 0$ și $b < 0$ sau $a < 0$ și $b > 0$, atunci:
$$a \cdot b = -|a| \cdot |b|.$$

Exemple. a) $2 \cdot 0 = 0$ și $0 \cdot (-3) = 0$.
b) $3 \cdot 7 = |3| \cdot |7| = 21$.
c) $(-2) \cdot (-5) = |-2| \cdot |-5| = 2 \cdot 5 = 10$.
d) $7 \cdot (-5) = -|7| \cdot |-5| = -7 \cdot 5 = -35$.

2. Proprietățile înmulțirii

1) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz)$ $(\forall)x, y, z \in \mathbf{Z}$;
2) Comutativitatea: $xy = yx$ $(\forall)x, y \in \mathbf{Z}$;
3) Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $(\forall)x \in \mathbf{Z}$;
4. Distributivitatea înmulțirii față de adunare:
$$x(y + z) = xy + xz \ (\forall)x, y, z \in \mathbf{Z}.$$
5. Distributivitatea înmulțirii față de scădere:
$$x(y - z) = xy - xz \ (\forall)x, y, z \in \mathbf{Z}.$$

Aplicații.

1. Calculați:

$$(-1)(-2)(-3) + (-2)(-3)(-4).$$

Soluție. $(-1)(-2)(-3) + (-2)(-3)(-4) = 2 \cdot (-3) +$
$+6 \cdot (-4) = -6 - 24 = -30.$

2. Calculați:

$$2(-1-2-3) + 2(-4-5-6).$$

Soluție. $2(-1-2-3) + 2(-4-5-6) =$
$= 2(-1-2-3-4-5-6) = 2(-21) = -42.$

3. Fiind date numerele întregi a, b, c, astfel încât $a + b = 12$ și $c = -5$, să se calculeze: $a \cdot c + b \cdot c + c \cdot c$.

Soluție. $a \cdot c + b \cdot c + c \cdot c = (a + b + c) \cdot c =$
$= (12 - 5) \cdot (-5) = 7 \cdot (-5) = -35.$

3.6 Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului

1. Fiind date $a, b, c \in \mathbf{Z}, b \neq 0$ astfel încât $a = b \cdot c$, spunem că numărul *c* este câtul dintre numerele întregi *a* și *b* și notăm $a{:}b$ sau $\frac{a}{b}$.

Numărul *a* se numește deîmpărțit, iar numărul *b* împărțitor.

Observații.

a) $0{:}a = 0$;
b) $a{:}1 = a$;
c) $a{:}(-1) = -a$.

Exerciții. a) $8{:}2 = 4$; $-15{:}3 = -5; 24{:}(-4) = -6$.

Aplicații.

1. Calculați: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9){:}9$.

Soluție. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$

Atunci: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9){:}9 = 45{:}9 = 5.$

2. Fiind date numerele întregi $a, b, c,$ determinați numărul c, astfel încât să avem:

$$a \cdot c - b \cdot c = 200 \text{ și } a - b = -20.$$

Soluție. Avem: $(a - b) \cdot c = 200$ și $a - b = -20$. Atunci: $(-20) \cdot c = 200 \Rightarrow c = 200 : (-20) = -10$.

3. Calculați:

$$[1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5)] : (1 + 2 + 3 + 4 + 5).$$

Soluție. $1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) = 2 \cdot (-12) \cdot (-5) =$
$= 2 \cdot 60 = 120$ și $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Atunci:
$[1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5)] : (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 120 : 15 = 8$.

3.7 Ridicarea la putere naturală a numerelor întregi

1. Dacă $a \in \mathbf{Z}$ și $n \in \mathbf{N}^*$, atunci definim:

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \quad (n \text{ factori}).$$

Regula semnelor:

a) $(+)^n = +$;

b) $(-)^n = \begin{cases} + \text{ dacă } n \text{ este par} \\ - \text{ dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$

Regula de ridicare la putere:

Pentru a ridica la puterea naturală *n* un număr întreg a se procedează astfel:

a) se calculează semnul puterii folosind regula semnelor;

b) se ridică la puterea *n* valoarea absolută a lui a ($|a|$).

Exemple.

a) $2^5 = +32$;

b) $(-2)^5 = -32$.

2. Operații cu puteri

1) $a^0 = 1$;

2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

3) $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0, m \geq n$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exemple.

1) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5 = -2^5 = -32;$

2) $(-3)^5 : (-3)^2 = (-3)^{5-2} = (-3)^3 = -3^3 = -27.$

3) $((-2)^3)^2 = (-2)^{3\cdot 2} = (-2)^6 = +2^6 = 64.$

3.8 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

a) Dacă într-o expresie nu există paranteze, atunci se efectuează mai întâi operațiile de ordinul al treilea, adică ridicările la putere, apoi operațiile de ordinul al doilea, adică înmulțirile și împărțirile, pentru ca în final să se efectueze operațiile de ordinul întâi, adică adunările și scăderile în ordinea în care sunt scrise.

Exemplu. $3 + (-2) \cdot 3 - 14 : (-7) + 2^5 \cdot 2^4 : 2^7 =$
$= 3 - 6 - (-2) + 2^{5+4-7} = -1 + 2^2 = -1 + 4 = 3.$

b) Dacă într-o expresie există paranteze, atunci se efectuează mai întâi operațiile cuprinse în parantezele rotunde, apoi cele cuprinse în parantezele drepte și la sfârșit operațiile cuprinse în acolade.

La efectuarea operațiilor dintr-o paranteză se respectă ordinea operațiilor.

Exemplu. a) $-1 + \{-2 - [-2 + (-2) \cdot (3 + 4)]\} =$
$= -1 + [-2 - (-2 + (-2) \cdot 7)] = -1 + (-2 - (-16)) = 13.$

3.9 Divizorii unui număr întreg

1. Fiind dat un număr întreg a, spunem că numărul întreg b este **divizor** al lui a, și scriem $b|a$ (b divide pe a), dacă există numărul natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. Putem scrie și $a \vdots b$ (a este divizibil cu b).

2. Fiind dat un număr întreg a, spunem că numărul întreg b este **multiplu** al lui a, dacă există numărul întreg c, astfel încât $b = a \cdot c$.

3. **Proprietățile divizibilității**

a) Orice număr întreg a se divide cu ± 1 și $\pm a$.

b) Numărul natural 0 se divide cu orice număr întreg a, sau 0 este multiplul oricărui număr întreg a.
c) Dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}^*$ și dacă a se divide cu b și b se divide cu c, atunci a se divide cu c.
d) Dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}^*$ astfel încât a divide pe b și a divide pe c, atunci a divide pe $b + c$ și a divide pe $b - c$.
e) Dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}^*$ astfel încât a divide pe b sau a divide pe c, atunci a divide pe $b \cdot c$.
f) Dacă $a, b \in \mathbf{Z}^*$ astfel încât a se divide cu b și b se divide cu a, atunci $a = b$ sau $a = -b$.

Aplicații

1. Determinați mulțimea $\{x \in \mathbf{Z} | x \text{ divide } -6\}$.

Soluție. Divizorii lui -6 sunt $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Atunci: $\{x \in \mathbf{Z} | x \text{ divide } -6\} = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$.

2. Determinați valorile întregi *x*, astfel încât numărul $\frac{6}{x-1}$ să fie număr întreg**.**

Soluție. Numărul $\frac{6}{x-1}$ este întreg, dacă $x - 1$ este divizor al lui 6, adică ia una din valorile $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2; x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0; x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3;$
$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1; x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4; x - 1 = -3 \Rightarrow x =$
$= -2; x - 1 = 6 \Rightarrow x = 7; x - 1 = -6 \Rightarrow x = -5.$
Deci valorile întregi ale lui *x* sunt: $-5, -2, 0, 2, 4, 7$.

3. Determinați numerele întregi a, b astfel încât să aibă loc egalitățile: $a + b = -5$ și $a \cdot b = 6$.

Soluție. $a \cdot b = 6 \Rightarrow a = 1, b = 6; a = -1, b = -6;$
$a = 2, b = 3; a = -2, b = -3; a = 3, b = 2; a = -3, b = -2;$
$a = 6, b = 1; a = -6, a = -1.$

Dintre toate posibilitățile, cele care verifică egalitatea $a + b = -5$ sunt: $a = -2, b = -3$ și $a = -3, b = -2$.

3.10 Aplicații

1. Calculați:

$$100:(-5)+80:(-4)+60:(-3)+40:(-2).$$

Soluție. $100:(-5)+80:(-4)+60:(-3)+40:(-2)=$
$=-20-20-20-20=-80.$

2. Calculați:

$$[(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{100}]:100.$$

Soluție. $[(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{100}]:100=$
$=(-1+1-1+\cdots+1):100=(0+0+\cdots+0):100=0.$

3. Calculați:

$$(-4)^{100}:[(-4)^1\cdot(-4)^2\cdot\cdots\cdot(-4)^{10}].$$

Soluție. $(-4)^{100}:[(-4)^1\cdot(-4)^2\cdot\cdots\cdot(-4)^{10}]=$
$=4^{100}:[(-4)^{1+2+\cdots+10}]=4^{100}:\left[(-4)^{\frac{10\cdot11}{2}}\right]=4^{100}:[(-4)^{55}]=$
$4^{100}:(-4^{55})=-4^{100-55}=-4^{45}.$

4. Demonstrați că pentru orice întreg $x\le 1$, are loc relația:

$$\big|x+|x-1|\big|=1.$$

Soluție. Pentru $x\le 1$, avem: $|x-1|=1-x$ și atunci:
$\big|x+|x-1|\big|=|x+1-x|=|1|=1.$

5. Determinați valorile întregi *x*, astfel încât numărul $\frac{x+2}{x}$ să fie întreg.

Soluție. $\frac{x+2}{x}=\frac{x}{x}+\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}$ și este întreg dacă *x* divide pe 2, adică $x=\pm1$ sau $x=\pm2$.

Dacă $x=1$, atunci $\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3.$

Dacă $x=-1$, atunci $\frac{x+2}{x}=\frac{-1+2}{-1}=-1.$

Dacă $x=2$, atunci $\frac{x+2}{x}=\frac{2+2}{2}=2.$

Dacă $x=-2$, atunci $\frac{x+2}{x}=\frac{-2+2}{-2}=0.$

C U P R I N S