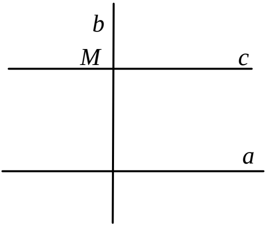
5. Paralelism

5.1 Drepte paralele, construirea dreptelor paralele, axioma paralelelor

1. Două drepte a și b se numesc **paralele** și se notează $a||b$ dacă dreptele a și b sunt coplanare și nu au nici un punct comun ($a \cap b = \emptyset$).

2. Printr-un punct dat, exterior unei drepte date, trece o singură paralelă la dreapta dată (axioma paralelelor).

3. Fiind dată dreapta a și punctul $M \notin a$, **construim** dreapta b ce trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta a, și apoi construim dreapta c, ce trece prin punctul M și este perpendiculară pe b. Atunci evident $c||a$.



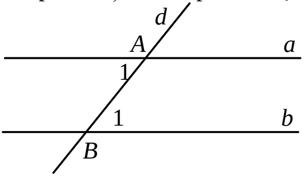
5.2 Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)

Teoremă. Dacă două drepte tăiate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci:

− cealaltă pereche de unghiuri alterne interne este formată din unghiuri congruente;

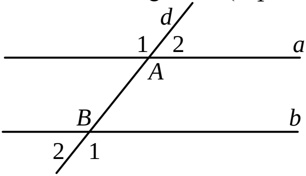
− fiecare pereche de unghiuri alterne externe este formată din unghiuri congruente;
− fiecare pereche de unghiuri corespondente este formată din unghiuri congruente.

Criteriul 1. Dacă două drepte a și b sunt tăiate de o secantă d în punctele A și B, și dacă unghiurile alterne interne $\widehat{A_1}$ și $\widehat{B_1}$ congruente, atunci dreptele a și b sunt paralele $(a||b)$.

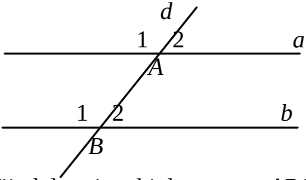


Exemplu. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul lui AC. Fie N simetricul punctului B față de punctul M. Atunci evident $\Delta MBC \equiv \Delta MNA$ $(MA = MC, MB = MN, \widehat{BMC} \equiv \widehat{AMN})$. Atunci $\widehat{MBC} \equiv \widehat{MNA}$ și cum acestea sunt alterne interne rezultă că $AN||BC$.

Criteriul 2. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B, atunci perechile de unghiuri alterne externe care se formează sunt congruente ($\widehat{A_1} \equiv \widehat{B_1}, \widehat{A_2} \equiv \widehat{B_2}$). .

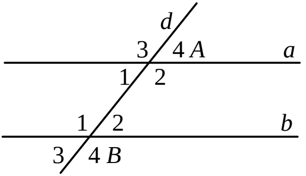


Criteriul 3. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B, atunci perechile de unghiuri corespondente care se formează sunt congruente ($\widehat{A_1} \equiv \widehat{B_1}, \widehat{A_2} \equiv \widehat{B_2}$).



Exemplu. Fiind dat triunghiul oarecare *ABC* și $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ astfel încât $MN||BC$, atunci $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ABC}$ și $\widehat{ANM} \equiv$ $\equiv \widehat{ACB}$ fiind corespondente.

Criteriul 4. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B, atunci unghiurile interne situate de aceeași parte a secantei și unghiurile externe situate de aceeași parte a secantei sunt suplementare: $m(\widehat{A_1}) + m(\widehat{B_1}) = 180^{\circ}$, $m(\widehat{A_2}) + m(\widehat{B_2}) = 180^{\circ}$, $m(\widehat{A_3}) + m(\widehat{B_3}) = 180^{\circ}$, $m(\widehat{A_4}) +$ $+m(\widehat{B_4}) = 180^{\circ}$.



Teoremă. Două drepte paralele determină segmente congruente pe alte două drepte paralele pe care le intersectează.

Proprietățile relației de paralelism

a) relația de paralelism este reflexivă ($a||b$);
b) relația de paralelism este simetrică ($a||b \Rightarrow b||a$);
c) relația de paralelism este tranzitivă ($a||b$ și $b||c \Rightarrow a||c$).

Aplicații.

a) Fie $ABC(AB = AC)$ un triunghi isoscel şi $[BM], M \in [AC]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$. Prin *M* se duce $MN \parallel BC$.

Demonstraţi că triunghiul *NBM* este isoscel.

Soluție. $MN||BC \Rightarrow \widehat{NMB} \equiv \widehat{MBC}$ (alterne interne). Însă $\widehat{NBM} \equiv \widehat{MBC}$ deoarece $[BM$ este bisectoare. Rezultă atunci că $\widehat{NBM} \equiv \widehat{NMB}$ şi deci triunghiul *NBM* este isoscel (fig. 1).

b) În triunghiul *ABC* se duce bisectoarea [*AD*]. Prin *B* se duce o paralelă la *AD*, care intersectează dreapta *AC* în *M*. Să se demonstreze că triunghiul *ABM* este isoscel.

Soluție. $MB||AD \Rightarrow \widehat{AMB} \equiv \widehat{CAD}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{MBA} \equiv \widehat{BAD}$ (alterne interne) şi $\widehat{CAD} \equiv \widehat{BAD}$, deoarece $[AD$ este bisectoare. Atunci $\widehat{MBA} \equiv \widehat{AMB}$ şi deci ΔABM este isoscel (fig.2).

c) Pe ipotenuza [*BC*] a unui triunghi dreptunghic *ABC* se ia un punct *M*. Fie *N* simetricul lui *M* faţă de *AB*. Dreapta *NB* intersectează paralela prin *M* la *AB* în punctul *D*. Să se demonstreze că triunghiul *BDM* este isoscel.

Soluție. Fie $O = MN \cap AB \Rightarrow \Delta BOM \equiv \Delta BON \Rightarrow [BM] \equiv$ $\equiv [BN]$ și $\widehat{NBO} \equiv \widehat{OBM}$; $AB||MD \Rightarrow \widehat{BDM} \equiv \widehat{NBO}$ (unghiuri corespondente) şi $\widehat{ABM} \equiv \widehat{BMD}$ (alterne interne). Rezultă atunci că $\widehat{BDM} \equiv \widehat{BMD}$ şi triunghiul *BDM* este isoscel (fig. 3).

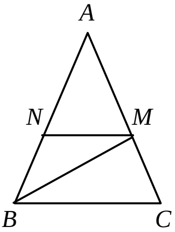


Fig. 1

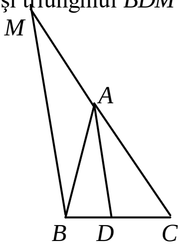


fig. 2

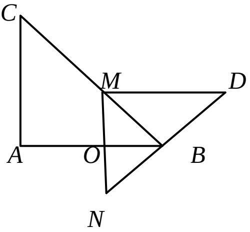


fig. 3

CUPRINS