

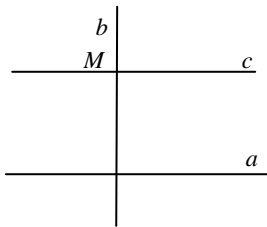
5. Paralelism

5.1 Drepte paralele, construirea dreptelor paralele, axioma paralelelor

1. Două drepte a și b se numesc **paralele** și se notează $a \parallel b$ dacă dreptele a și b sunt coplanare și nu au nici un punct comun ($a \cap b = \emptyset$).

2. Printr-un punct dat, exterior unei drepte date, trece o singură paralelă la dreapta dată (axioma paralelelor).

3. Fiind dată dreapta a și punctul $M \notin a$, **construim** dreapta b ce trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta a , și apoi construim dreapta c , ce trece prin punctul M și este perpendiculară pe b . Atunci evident $c \parallel a$.



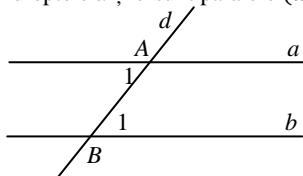
5.2 Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)

Teoremă. Dacă două drepte tăiate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci:

— cealaltă pereche de unghiuri alterne interne este formată din unghiuri congruente;

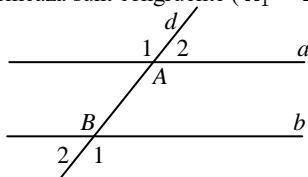
- fiecare pereche de unghiuri alterne externe este formată din unghiuri congruente;
- fiecare pereche de unghiuri corespondente este formată din unghiuri congruente.

Criteriul 1. Dacă două drepte a și b sunt tăiate de o secantă d în punctele A și B , și dacă unghiurile alterne interne \widehat{A}_1 și \widehat{B}_1 congruente, atunci dreptele a și b sunt paralele ($a \parallel b$).

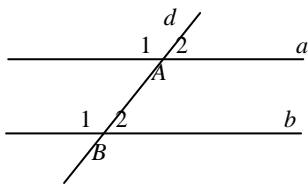


Exemplu. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul lui AC . Fie N simetricul punctului B față de punctul M . Atunci evident $\triangle MBC \equiv \triangle MNA$ ($MA = MC, MB = MN, \widehat{BMC} \equiv \widehat{AMN}$). Atunci $\widehat{MBC} \equiv \widehat{MNA}$ și cum acestea sunt alterne interne rezultă că $AN \parallel BC$.

Criteriul 2. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B , atunci perechile de unghiuri alterne externe care se formează sunt congruente ($\widehat{A}_1 \equiv \widehat{B}_1, \widehat{A}_2 \equiv \widehat{B}_2$).

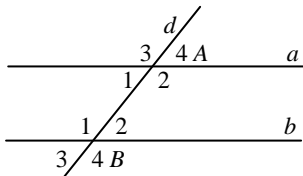


Criteriul 3. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B , atunci perechile de unghiuri corespondente care se formează sunt congruente ($\widehat{A}_1 \equiv \widehat{B}_1, \widehat{A}_2 \equiv \widehat{B}_2$).



Exemplu. Fiind dat triunghiul oarecare ABC și $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ astfel încât $MN \parallel BC$, atunci $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ABC}$ și $\widehat{ANM} \equiv \widehat{ACB}$ fiind corespondente.

Criteriul 4. Dacă două drepte a și b sunt paralele și tăiate de secanta d în punctele A și B , atunci unghiurile interne situate de aceeași parte a secantei și unghiurile externe situate de aceeași parte a secantei sunt suplementare: $m(\widehat{A_1}) + m(\widehat{B_1}) = 180^\circ$, $m(\widehat{A_2}) + m(\widehat{B_2}) = 180^\circ$, $m(\widehat{A_3}) + m(\widehat{B_3}) = 180^\circ$, $m(\widehat{A_4}) + m(\widehat{B_4}) = 180^\circ$.



Teoremă. Două drepte paralele determină segmente congruente pe alte două drepte paralele pe care le intersectează.

Proprietățile relației de paralelism

- relația de paralelism este reflexivă ($a \parallel b$);
- relația de paralelism este simetrică ($a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$);
- relația de paralelism este tranzitivă ($a \parallel b$ și $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$).

Aplicații.

a) Fie ABC ($AB = AC$) un triunghi isoscel și $[BM]$, $M \in [AC]$ bisectoarea unghiului \hat{A} . Prin M se duce $MN \parallel BC$.
 Demonstrați că triunghiul NBM este isoscel.

Soluție. $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{NMB} \equiv \widehat{MBC}$ (alterne interne). Însă $\widehat{NBM} \equiv \widehat{MBC}$ deoarece $[BM]$ este bisectoare. Rezultă atunci că $\widehat{NBM} \equiv \widehat{NMB}$ și deci triunghiul NBM este isoscel (fig. 1).

b) În triunghiul ABC se duce bisectoarea $[AD]$. Prin B se duce o paralelă la AD , care intersectează dreapta AC în M . Să se demonstreze că triunghiul ABM este isoscel.

Soluție. $MB \parallel AD \Rightarrow \widehat{AMB} \equiv \widehat{CAD}$ (unghiuri corespondente), $\widehat{MBA} \equiv \widehat{BAD}$ (alterne interne) și $\widehat{CAD} \equiv \widehat{BAD}$, deoarece $[AD]$ este bisectoare. Atunci $\widehat{MBA} \equiv \widehat{AMB}$ și deci ΔABM este isoscel (fig.2).

c) Pe ipotenuza $[BC]$ a unui triunghi dreptunghic ABC se ia un punct M . Fie N simetricul lui M față de AB . Dreapta NB intersectează paralela prin M la AB în punctul D . Să se demonstreze că triunghiul BDM este isoscel.

Soluție. Fie $O = MN \cap AB \Rightarrow \Delta BOM \equiv \Delta BON \Rightarrow [BM] \equiv [BN]$ și $\widehat{NBO} \equiv \widehat{OBM}$; $AB \parallel MD \Rightarrow \widehat{BDM} \equiv \widehat{NBO}$ (unghiuri corespondente) și $\widehat{ABM} \equiv \widehat{BMD}$ (alterne interne). Rezultă atunci că $\widehat{BDM} \equiv \widehat{BMD}$ și triunghiul BDM este isoscel (fig. 3).

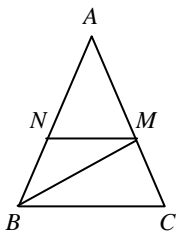


Fig. 1

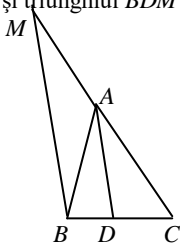


fig. 2

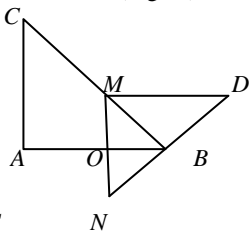


fig. 3

CUPRINS

	Geometrie plană	3
1.	Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta	3
	1.1 Punctul	3
	1.2 Dreapta	3
	1.3 Segmentul de dreaptă	5
	1.4 Semidreapta	8
2.	Unghiul	9
	2.1 Elementele și măsura unui unghi	9
	2.2 Clasificarea unghiurilor	10
	2.3 Congruența unghiurilor	10
	2.4 Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi . . .	10
	2.5 Unghiuri opuse la vârf; congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct; suma măsurilor lor	12
3.	Congruența triunghiurilor	14
	3.1 Triunghi: definiție, elemente; clasificarea triunghiurilor; perimetrul triunghiului	14
	3.2 Construcția triunghiurilor	16
	3.3 Congruența triunghiului oarecare	17
4.	Perpendicularitate	19
	4.1 Drepte perpendiculare; oblice; distanța de la un punct la o dreaptă	19
	4.2 Înălțimea în triunghi; concurența înălțimilor	19
	4.3 Criterii de congruență ale triunghiurilor dreptunghice: IC, IU, CC, CU	21
	4.4 Mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi; simetria față de o dreaptă	22
5.	Paralelism	23
	5.1 Drepte paralele; construirea dreptelor paralele; axioma paralelelor	23

	5.2 Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	24
6.	Proprietăți ale triunghiurilor	27
	6.1 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior	27
	6.2 Mediana în triunghi; concurența medianelor unui triunghi	28
	6.3 Proprietăți ale triunghiului isoscel	29
	6.4 Proprietăți ale triunghiului echilateral	31
	6.5 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	32
7	Patrulater	33
	7.1 Patrulaterul convex, suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	33
	7.2 Paralelogram; proprietăți	34
	7.3 Paralelograme particulare; dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți	36
	7.4 Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți	40
	7.5 Arii; calculul ariilor unor suprafețe	42
	7.6 Aplicații	45
8	Asemănarea triunghiurilor	46
	8.1 Raportul a două segmente, segmente proporționale	46
	8.2 Teorema paralelelor echidistante. Teorema lui Thales	46
	8.3 Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi	47
	8.4 Linia mijlocie în trapez; proprietăți	48
	8.5 Triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării	48
	8.6 Aplicații	49
9	Relații metrice în triunghiul dreptunghic	51
	9.1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă	51

	9.2 Teoreme importante, teorema înălțimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora	51
	9.3 Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic; sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi	52
	9.4 Rezolvarea triunghiului dreptunghic	53
	9.5 Aplicații	54
10	Cercul	55
	10.1 Cercul; definiție, elemente	55
	10.2 Unghi la centru; măsura arcelor; arce congruente	56
	10.3 Coarde și arce în cerc	56
	10.4 Unghi înscris în cerc; triunghi înscris în cerc	57
	10.5 Patrulater înscris în cerc; patrulater inscriptibil	57
	10.6 Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc; tangenta dintr-un punct exterior la un cerc; triunghi circumscris unui cerc; patrulater circumscris unui cerc	58
	10.7 Poligoane regulate; calculul elementelor în triunghiul echilateral, pătrat, hexagon regulat	59
	10.8 Aplicații	60
	Geometrie în spațiu	61
1.	Relații între puncte, drepte și plane	61
	1.1 Puncte, drepte, plane; determinarea dreptei, determinarea planului	61
	1.2 Unghiul a două drepte în spațiu, drepte perpendiculare	61
	1.3 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan; dreaptă perpendiculară pe un plan; distanța de la un punct la un plan	62
	1.4 Pozițiile relative a două plane; plane paralele; distanța dintre două plane paralele	63
	1.5 Aplicații	63

2.	Proiecții ortogonale pe un plan	66
	2.1 Proiecții de puncte, segmente și de drepte pe un plan; unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecției unui segment pe un plan	66
	2.2 Teorema celor trei perpendiculare	68
	2.3 Unghi diedru; unghiul dintre două plane; plane perpendiculare	69
3.	Corpuri geometrice	70
	3.1 Prisma regulată.	70
	3.2 Piramida regulată	73
	3.3 Trunchiul de piramidă regulată	76
	3.4 Corpuri rotunde	78
	3.4.1 Cilindrul circular drept	78
	3.4.2 Conul circular drept	80
	3.4.3 Trunchiul de con circular drept	81
	3.4.4 Sfera	82
4.	Probleme alese de geometrie	84