

1.19 Aplicațiile trigonometriei în geometrie

1. Teorema sinusurilor

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Exemplu. Fiind dat triunghiul ABC , cunoscând $a = BC = 10$, $\hat{A} = 30^\circ$ și $b = 20$. Atunci avem:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{10} = 1 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ.$$

2. Teorema cosinusului

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C. \end{aligned}$$

Exemplu. Se consideră triunghiul oarecare ABC , cunoscând lungimile laturilor $AB = c = 6, AC = b = 8, BC = a = 10$. Atunci:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 6^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = 0 \Rightarrow A = 90^\circ.$$

3. Formule ale funcțiilor trigonometrice ale jumătăților de unghiuri

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}; \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}; \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}; \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}; \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}; \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{aligned}$$

Exemple.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

$$\text{a) } (b-c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + (c-a) \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + (a-b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 0$$

$$\text{b) } (b+c) \cdot \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} + (c+a) \cdot \operatorname{tg} \frac{C-A}{2} + (a+b) \cdot \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = 0.$$

Soluție. a) $(b-c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 2R \cdot (\sin B - \sin C) \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} =$

$$= 4R \cdot \sin \frac{B-C}{2} \cdot \cos \frac{B+C}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 4R \cdot \sin \frac{B-C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} =$$

$$= 4R \cdot \sin \frac{B-C}{2} \cdot \sin \frac{B+C}{2} = 2R \cdot (\cos C - \cos B)$$

Analog și celelalte două relații și după aceea se adună membru cu membru și se obține relația din enunț.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (b+c) \cdot \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} &= 2R \cdot (\sin B + \sin C) \cdot \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \\
 &= 4R \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} = 4R \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2} = \\
 &= 2R \cdot (\cos C - \cos B).
 \end{aligned}$$

Analog și celelalte două relații și după aceea se adună membru cu membru și se obține relația din enunț.

4. Raza cercului înscris într-un triunghi

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b și c raza r a cercului înscris în triunghi este dată de egalitatea:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Exemple.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

$$\text{a) } \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$$

$$\text{b) } \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{S}{r^2}.$$

Soluție.

$$\text{a) } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}.$$

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \frac{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}{pabc}$$

$$= \frac{S^2}{pabc} = \frac{S}{p} \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{abc}{4S}} = \frac{r}{4R};$$

b) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = \frac{p(p-a)}{S}$ și atunci:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p(p-a)}{S} + \frac{p(p-b)}{S} + \frac{p(p-c)}{S} =$$

$$= \frac{p(3p-a-b-c)}{S} = \frac{p^2}{S} = S \cdot \frac{p^2}{S^2} = \frac{S}{r^2}.$$

5. Raza cercului circumscris unui triunghi

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b, c , aria S , raza R a cercului circumscris triunghiului este dată de egalitatea:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Exemple.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

a) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{2R}$

b) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$

Soluție.

$$\begin{aligned}
\text{a) } \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} &= \\
&= \frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \frac{1 - \cos C}{2} = \\
&= 1 + \frac{1 - (\cos A + \cos B + \cos C)}{2} = 1 + \frac{-4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{2} = \\
&= 1 - 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = 1 - 2 \cdot \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \\
&\cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = 1 - 2 \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \\
&= 1 - 2 \cdot \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = 1 - 2 \cdot \frac{S^2}{pabc} = \\
&= 1 - \frac{S}{p} \cdot \frac{1}{\frac{abc}{4R^2} \cdot 2} = 1 - \frac{r}{2R};
\end{aligned}$$

$$\text{b) } \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} = \frac{R \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{abc}.$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{R(a^2 - b^2 + c^2)}{abc}; \quad \operatorname{ctg} C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}.$$

Adunând membru cu membru cele trei relații obținem:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C + = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

6. Razele cercurilor exînscrise unui triunghi

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b, c , aria S , razele r_a, r_b, r_c ale cercurilor exînscrise triunghiului sunt date de egalitățile:

$$r_a = \frac{S}{p-a}, r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Exemple.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

$$\text{a) } \frac{a \cdot (b+c)}{r_a \cdot (r_b + r_c)} + \frac{b \cdot (c+a)}{r_b \cdot (r_c + r_a)} + \frac{c \cdot (a+b)}{r_c \cdot (r_a + r_b)} = 4$$

$$\text{b) } \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} = S.$$

Soluție. a)
$$\frac{a(b+c)}{r_a(r_b+r_c)} = \frac{a(b+c)}{\frac{S}{p-a} \cdot \left(\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \right)} =$$

$$= \frac{a(b+c)}{S^2(2p-b-c)} = \frac{a(b+c)}{pa} = \frac{b+c}{p} \Rightarrow$$

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{a(b+c)}{r_a(r_b+r_c)} + \frac{b(c+a)}{r_b(r_c+r_a)} + \frac{c(a+b)}{r_c(r_a+r_b)} =$$

$$= \frac{b+c}{p} + \frac{a+c}{p} + \frac{a+b}{p} = \frac{2 \cdot (a+b+c)}{p} = \frac{4p}{p} = 4;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} &= \sqrt{\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}} = \\ &= \sqrt{\frac{S^4}{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}} = \sqrt{S^2} = S. \end{aligned}$$

7. Aria unui triunghi

În orice triunghi ABC având laturile egale cu a, b, c , aria S , semiperimetrul p , aria triunghiului este dată de egalitățile:

$$S = \frac{ab \sin C}{2}, S = \frac{bc \sin A}{2}, S = \frac{ca \sin B}{2};$$

$$S = pr;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exemplu. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relația:

$$\sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} = S.$$

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} &= \sqrt{\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}} = \\ &= \sqrt{\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \sqrt{\frac{S^4}{S^2}} = S. \end{aligned}$$

8. Rezolvarea triunghiului oarecare

Prin rezolvarea unui triunghi oarecare înțelegem determinarea lungimilor laturilor și a măsurilor unghiurilor sale când se cunosc

trei dintre ele.

În funcție de laturile și unghiurile care se cunosc distingem 3 cazuri:

a) Se cunosc două laturi și unghiul dintre ele, de exemplu b, A, c . Se aplică teorema cosinusului și se determină:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

Tot din teorema cosinusului avem:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ de unde rezultă } B.$$

Apoi calculăm: $C = \pi - A - B$.

Exemplu. Se dau $b = 5, A = 60^\circ, c = 7$. Atunci $a = \sqrt{39}$.

$$\cos B = \frac{3\sqrt{39}}{26} \Rightarrow B = \arccos \frac{3\sqrt{39}}{26} \text{ și } C = \pi - 60^\circ - \arccos \frac{3\sqrt{39}}{26}.$$

b) Se cunosc o latură și unghiurile alăturate, de exemplu B, a, C . Atunci $A = \pi - B - C$. Se aplică teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ de unde } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)} \text{ și}$$
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)}.$$

Exemplu. Se dau $B = 45^\circ, C = 45^\circ$ și $a = 10 \Rightarrow A = 90^\circ$ și

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = 5\sqrt{2}; \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = 5\sqrt{2}.$$

c) Se dau trei laturi ale triunghiului a, b, c . Se aplică teorema cosinusului pentru a determina cele trei unghiuri:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, de unde rezultă unghiurile.

Exemplu. Se dau $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$. Atunci:

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3 + 1 - 4}{2\sqrt{3} \cdot 1} = 0, \cos B = \frac{1}{2}, \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
de unde $A = 90^\circ, B = 60^\circ, C = 30^\circ$.

Aplicații

1. Să se rezolve un triunghi oarecare, știind că laturile lui sunt proporționale cu numerele $1 + \sqrt{3}, \sqrt{6}, 2$.

Soluție. $\frac{a}{1 + \sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{6}} = \frac{c}{2} = 2 \cdot R \Rightarrow a = 2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot R,$

$b = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot R$. Se aplică apoi teorema cosinusului și se obține:
 $\hat{A} = 75^\circ, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ$.

2. Să se rezolve un triunghi oarecare ABC cunoscând latura $AB = c$, înălțimea $AA' = h_a$ și mediana $AM = m_a$.

Soluție. $A'B = \sqrt{c^2 - h_a^2}; A'M = \sqrt{m_a^2 - h_a^2}; BM = \frac{a}{2} =$
 $= \sqrt{c^2 - h_a^2} + \sqrt{m_a^2 - h_a^2} \Rightarrow a = 2\sqrt{c^2 - h_a^2} + 2\sqrt{m_a^2 - h_a^2}.$

Cu ușurință se determină b și apoi cu ajutorul teoremei cosinusului se determină unghiurile.

9. Aplicații

1. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

$$\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot (\sin B + \sin C) \cdot (\cos B - \cos C) = 0.$$

Soluție. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot (\sin B + \sin C) \cdot (\cos B - \cos C) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \cdot 2 \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{C-B}{2} = \\ &= 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C-B}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = \sin A \cdot \sin(C-B) = \\ &= \sin(B+C) \cdot \sin(C-B) = \cos 2B - \cos 2C. \end{aligned}$$

2. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - \frac{r}{2R}.$$

Soluție. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \frac{1 - \cos C}{2} = \\ &= 1 + \frac{1 - (\cos A + \cos B + \cos C)}{2} = 1 + \frac{-4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = 1 - 2 \cdot \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \\
&\cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = 1 - 2 \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \\
&= 1 - 2 \cdot \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = 1 - 2 \cdot \frac{S^2}{pabc} = \\
&= 1 - \frac{S}{p} \cdot \frac{1}{\frac{abc}{4R^2} \cdot 2} = 1 - \frac{r}{2R}.
\end{aligned}$$

3. Să se arate că triunghiul ABC în care există una din relațiile:

a) $\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$

b) $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$

c) $a = 2 \cdot b \cdot \cos C$

este isoscel.

Soluție.

a) $\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \Rightarrow \sin \frac{A-B}{2} = 0 \Rightarrow A = B$;

b) $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A \Rightarrow 2R \cdot \sin A \cdot \cos B =$
 $= 2R \cdot \sin B \cdot \cos A \Rightarrow \sin(A-B) = 0 \Rightarrow A = B$;

c) $a = 2b \cos C \Rightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2$.

Atunci $b^2 = c^2 \Rightarrow b = c$.

4. Să se arate că triunghiul ABC în care există una din relațiile:

a) $\cos B + \cos C = \sin B + \sin C$

b) $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \sin C$

este triunghi dreptunghic.

Soluție. a) $\cos B + \cos C = \sin B + \sin C \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot \cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B+C = \frac{\pi}{2};$$

b) $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \sin C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}} = \sin C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{C}{2} = 1 \Rightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

CUPRINS

1.	Trigonometrie	3
1.1	Unități de măsură pentru unghiuri și arce	3
1.2	Rezolvarea triunghiului dreptunghic	4
1.2.1	Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit al unui triunghi ABC dreptunghic în A	4
1.2.2	Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile uzuale ale unui triunghi dreptunghic ...	4
1.2.3	Cazuri de rezolvare a triunghiului drep- tunghic	5
1.2.4	Egalități trigonometrice într-un triunghi dreptunghic	6
1.2.5	Aplicații	6
1.3	Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice.	8
1.3.1	Cercul trigonometric	8
1.3.2	Funcții trigonometrice	9
1.4	Periodicitatea, paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice	12
1.4.1	Periodicitatea funcțiilor trigonometrice .	12
1.4.2	Paritatea și imparitatea funcțiilor trigono- metrice	13
1.5	Reducerea la primul cadran	13
1.6	Graficele funcțiilor trigonometrice	15
1.7	Formule de legătură între funcțiile trigono- metrice	18
1.8	Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	20
1.9	Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu și ale jumătății unui unghi	23
1.10	Transformarea sumei sau diferenței de funcții trigonometrice în produs	25

1.11	Transformarea produsului de funcții trigonometrice în sumă	26
1.12	Identități trigonometrice	27
1.13	Transformarea unei expresii trigonometrice într-un produs de alte expresii trigonometrice	32
1.14	Expresii care nu depind de parametri	33
1.15	Funcții trigonometrice inverse	34
1.16	Inegalități trigonometrice	36
1.17	Ecuții trigonometrice	37
1.18	Aplicațiile trigonometriei în algebră	44
	1.18.1 Numere complexe sub formă trigonometrică	44
	1.18.2 Operații cu numere complexe sub formă trigonometrică	45
	1.18.3 Rădăcinile de ordin n ale unui număr complex	47
	1.18.4 Ecuții binome	48
1.19	Aplicațiile trigonometriei în geometrie	49
2.	Geometrie	61
	2.1 Paralelism și calcul vectorial	61
	2.1.1 Segmente orientate	61
	2.1.2 Vectori. Operații cu vectori	64
	2.1.3 Descompunerea unui vector după direcții date	69
	2.1.4 Vectori coliniari	70
	2.1.5 Vectorul de poziție al unui punct	72
	2.1.6 Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi. Relația lui Sylvester	74
	2.1.7 Teorema lui Menelaus. Teorema lui Ceva.	76
	2.1.8 Produsul scalar a doi vectori	77
	2.2 Elemente de geometrie analitică	79
	2.2.1 Reper cartezian. Coordonate carteziene ..	79
	2.2.2 Coordonatele unui vector. Operații cu	

vectori în coordonate carteziane	80
2.2.3 Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat	81
2.2.4 Ecuații ale dreptei în plan	82
2.2.5 Coliniaritate, concurență	83
2.2.6 Paralelism, perpendicularitate	84
2.2.7 Calcule de distanțe și arii	86
3. Probleme alese de trigonometrie	89
4. Probleme alese de geometrie	98