1.19 Aplicațiile trigonometriei în geometrie

1. Teorema sinusurilor

În orice triunghi *ABC* având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Exemplu. Fiind dat triunghiul *ABC*, cunoscând $a = BC = 10$ $\hat{A} = 30^0$ și $b = 20$. Atunci avem:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{10} = 1 \Rightarrow \hat{A} = 90^0.$$

2. Teorema cosinusului

În orice triunghi *ABC* având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\,;$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B\,;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Exemplu. Se consideră triunghiul oarecare *ABC*, cunoscând lungimile laturilor $AB = c = 6, AC = b = 8, BC = a = 10$. Atunci:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 6^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = 0 \Rightarrow A = 90^0.$$

3. Formule ale funcțiilor trigonometrice ale jumătăților de unghiuri

În orice triunghi *ABC* având laturile egale cu a, b și c sunt adevărate egalitățile:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\ \ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}};\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ;$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}};\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Exemple.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

a) $\left(b-c\right)\cdot ctg\,\frac{A}{2}+(c-a)\cdot ctg\,\frac{B}{2}+(a-b)\cdot ctg\,\frac{C}{2}=0$

b) $\left(b+c\right)\cdot tg\,\frac{B-C}{2}+(c+a)\cdot tg\,\frac{C-A}{2}+(a+b)\cdot tg\,\frac{A-B}{2}=0$.

Soluție. a) $\left(b-c\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=2R\cdot(\sin B-\sin C)\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=$

$$=4R\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=4R\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=$$

$$=4R\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}=2R\cdot(\cos C-\cos B)$$

Analog şi celelalte două relaţii şi după aceea se adună membru cu membru și se obține relația din enunț.

b) $\left(b+c\right)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}=2R\cdot(\sin B+\sin C)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}=$

$$=4R\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}=4R\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}=$$

$=2R\cdot(\cos C-\cos B)$.

Analog şi celelalte două relaţii şi după aceea se adună membru cu membru și se obține relația din enunț.

4. Raza cercului înscris într-un triunghi

În orice triunghi *ABC* având laturile egale cu a, b și c raza r a cercului înscris în triunghi este dată de egalitatea:

$$r=\frac{S}{p}.$$

Exemple.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

a) $\sin\dfrac{A}{2}\cdot\sin\dfrac{B}{2}\cdot\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{4R}$

b) $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{S}{r^2}$.

Soluție.

a) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}\cdot$

$$\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \frac{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{pabc} =$$

$$= \frac{S^2}{pabc} = \frac{S}{p}\cdot\frac{1}{4\cdot\frac{abc}{4S}} = \frac{r}{4R};$$

b) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = \frac{p(p-a)}{S}$ şi atunci:

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{p(p-a)}{S} + \frac{p(p-b)}{S} + \frac{p(p-c)}{S} =$$

$$= \frac{p(3p-a-b-c)}{S} = \frac{p^2}{S} = S\cdot\frac{p^2}{S^2} = \frac{S}{r^2}.$$

5. Raza cercului circumscris unui triunghi

În orice triunghi *ABC* având laturile egale cu a, b, c, aria *S*, raza R a cercului circumscris triunghiului este dată de egalitatea:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Exemple.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

a) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$

b) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Soluție.

a) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=$

$$=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}=$$

$$=1+\frac{1-(\cos A+\cos B+\cos C)}{2}=1+\frac{-4\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{2}=$$

$$=1-2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=1-2\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}=1-2\cdot\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=$$

$$=1-2\cdot\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}=1-2\cdot\frac{S^2}{pabc}=$$

$$=1-\frac{S}{p}\cdot\frac{1}{\frac{abc}{4R^2}\cdot 2}=1-\frac{r}{2R};$$

b) $\operatorname{ctg}A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}}=\frac{R\cdot(b^2+c^2-a^2)}{abc}$.

$\operatorname{ctg}B=\frac{R(a^2-b^2+c^2)}{abc}$; $\operatorname{ctg}C=\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$.

Adunând membru cu membru cele trei relații obținem:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C + = \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

6. Razele cercurilor exînscrise unui triunghi

În orice triunghi *ABC* având laturile egale cu a, b, c, aria S, razele r_a, r_b, r_c ale cercurilor exînscrise triunghiului sunt date de egalitățile:

$$r_a = \frac{S}{p-a}, r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Exemple.

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

a) $\dfrac{a\cdot(b+c)}{r_a\cdot(r_b+r_c)} + \dfrac{b\cdot(c+a)}{r_b\cdot(r_c+r_a)} + \dfrac{c\cdot(a+b)}{r_c\cdot(r_a+r_b)} = 4$

b) $\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c} = S$.

Soluție. a) $\dfrac{a(b+c)}{r_a(r_b+r_c)} = \dfrac{a(b+c)}{\dfrac{S}{p-a}\cdot\left(\dfrac{S}{p-b}+\dfrac{S}{p-c}\right)} =$

$$= \frac{a(b+c)}{\dfrac{S^2(2p-b-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{a(b+c)}{pa} = \frac{b+c}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a(b+c)}{r_a(r_b+r_c)} + \frac{b(c+a)}{r_b(r_c+r_a)} + \frac{c(a+b)}{r_c(r_a+r_b)} =$$

$$= \frac{b+c}{p} + \frac{a+c}{p} + \frac{a+b}{p} = \frac{2\cdot(a+b+c)}{p} = \frac{4p}{p} = 4;$$

b) $\sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} = \sqrt{\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}} =$

$$= \sqrt{\frac{S^4}{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}} = \sqrt{S^2} = S.$$

7. Aria unui triunghi

În orice triunghi *ABC* având laturile egale cu $a, b, c,$ aria *S*, semiperimetrul *p*, aria triunghiului este dată de egalitățile:

$$S = \frac{ab\sin C}{2}, S = \frac{bc\sin A}{2}, S = \frac{ca\sin B}{2};$$

$$S = pr;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exemplu. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relația:

$$\sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} = S.$$

Soluție. $\sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} = \sqrt{\frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}} =$

$$= \sqrt{\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \sqrt{\frac{S^4}{S^2}} = S.$$

8. Rezolvarea triunghiului oarecare

Prin rezolvarea unui triunghi oarecare înțelegem determinarea lungimilor laturilor și a măsurilor unghiurilor sale când se cunosc trei dintre ele.

În funcție de laturile și unghiurile care se cunosc distingem 3 cazuri:

a) Se cunosc două laturi și unghiul dintre ele, de exemplu b, A, c. Se aplică teorema cosinusului și se determină:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}.$$

Tot din teorema cosinusului avem:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{de unde rezultă } B.$$

Apoi calculăm: $C = \pi - A - B$.

Exemplu. Se dau $b = 5, A = 60^0, c = 7$. Atunci $a = \sqrt{39}$.

$$\cos B = \frac{3\sqrt{39}}{26} \Rightarrow B = \arccos\frac{3\sqrt{39}}{26} \text{ și } C = \pi - 60^0 - \\ - \arccos\frac{3\sqrt{39}}{26}.$$

b) Se cunosc o latură și unghiurile alăturate, de exemplu B, a, C. Atunci $A = \pi - B - C$. Se aplică teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{de unde } b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{a\sin B}{\sin(B+C)} \text{ și}$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{a\sin C}{\sin(B+C)}.$$

Exemplu. Se dau $B = 45^0, C = 45^0$ și $a = 10 \Rightarrow A = 90^0$ și

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{10\sin 45^0}{\sin 90^0} = 5\sqrt{2};\;\; c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{10\sin 45^0}{\sin 90^0} = \\ = 5\sqrt{2}.$$

c) Se dau trei laturi ale triunghiului a, b, c. Se aplică teorema cosinusului pentru a determina cele trei unghiuri:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, de unde rezultă unghiurile.

Exemplu. Se dau $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$. Atunci:
$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{3+1-4}{2\sqrt{3}\cdot 1} = 0, \cos B = \dfrac{1}{2}, \cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
de unde $A = 90^0, B = 60^0, C = 30^0$.

Aplicații

1. Să se rezolve un triunghi oarecare, ştiind că laturile lui sunt proporţionale cu numerele $1+\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2$.

Soluție. $\dfrac{a}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{b}{\sqrt{6}} = \dfrac{c}{2} = 2\cdot R \Rightarrow a = 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot R$,
$b = 2\cdot\sqrt{6}\cdot R$. Se aplică apoi teorema cosinusului şi se obţine: $\hat{A} = 75^\circ, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ$.

2. Să se rezolve un triunghi oarecare ABC cunoscând latura $AB = c$, înălțimea $AA' = h_a$ și mediana $AM = m_a$.

Soluție. $A'B = \sqrt{c^2-h_a^2};\ A'M = \sqrt{m_a^2-h_a^2};\ BM = \dfrac{a}{2} =$
$= \sqrt{c^2-h_a^2} + \sqrt{m_a^2-h_a^2} \Rightarrow a = 2\sqrt{c^2-h_a^2} + 2\sqrt{m_a^2-h_a^2}$.

Cu ușurință se determină b și apoi cu ajutorul teoremei cosinusului se determină unghiurile.

9. Aplicații

1. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

$$\sum tg\frac{A}{2}\cdot(\sin B+\sin C)\cdot(\cos B-\cos C)=0 .$$

Soluție. $\mathrm{tg}\frac{A}{2}\cdot(\sin B+\sin C)\cdot(\cos B-\cos C)=$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot 2\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{C-B}{2}=$$

$$=4\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C-B}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}=\sin A\cdot\sin(C-B)=$$

$$=\sin(B+C)\cdot\sin(C-B)=\cos 2B-\cos 2C .$$

2. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R} .$$

Soluție. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=$

$$=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}=$$

$$=1+\frac{1-(\cos A+\cos B+\cos C)}{2}=1+\frac{-4\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{2}=$$

$$= 1 - 2 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} = 1 - 2 \cdot \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = 1 - 2 \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = 1 - 2 \cdot \frac{S^2}{pabc} =$$

$$= 1 - \frac{S}{p} \cdot \frac{1}{\frac{abc}{4R^2} \cdot 2} = 1 - \frac{r}{2R}.$$

3. Să se arate că triunghiul *ABC* în care există una din relațiile:

a) $\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}$

b) $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$

c) $a = 2 \cdot b \cdot \cos C$

este isoscel.

Soluție.

a) $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow \sin\frac{A-B}{2} = 0 \Rightarrow A = B$;

b) $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A \Rightarrow 2R \cdot \sin A \cdot \cos B =$
$= 2R \cdot \sin B \cdot \cos A \Rightarrow \sin(A - B) = 0 \Rightarrow A = B$;

c) $a = 2b\cos C \Rightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2$.
Atunci $b^2 = c^2 \Rightarrow b = c$.

4. Să se arate că triunghiul *ABC* în care există una din relaţiile:

a) $\cos B + \cos C = \sin B + \sin C$

b) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \sin C$

este triunghi dreptunghic.

Soluție. a) $\cos B + \cos C = \sin B + \sin C \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot \cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \Rightarrow tg \frac{B+C}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B + C = \frac{\pi}{2};$$

b) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \sin C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}} = \sin C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{C}{2} = 1 \Rightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

CUPRINS