

## 2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale(șir)

### 2.1 Șiruri

**Definiție.** Fiind dată o mulțime oarecare  $A$ , numim **șir** de elemente din mulțimea  $A$  o funcție  $f: \mathbf{N}^* \rightarrow A$ .

Dacă  $A \subset \mathbf{R}$ , atunci șirul se numește șir de numere reale.

Notăm  $f(n) = a_n$ , iar șirul de numere reale cu  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

**Definiție.** Șirul de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  este **strict crescător** dacă  $a_n < a_{n+1}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$ .

**Exemplu.** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = 3n + 7$ . Atunci:

$$a_{n+1} = 3(n+1) + 7 = 3n + 10 > 3n + 7 = a_n.$$

**Definiție.** Șirul de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  este **strict descres-cător** dacă  $a_n > a_{n+1}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$ .

**Exemplu.** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = -n + 1$ . Atunci:

$$a_{n+1} = -(n+1) + 1 = -n < -n + 1 = a_n.$$

**Definiție.** Șirul de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  este **monoton cres-cător** dacă  $a_n \leq a_{n+1}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$ .

**Definiție.** Șirul de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  este **monoton des-crescător** dacă  $a_n \geq a_{n+1}, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$ .

**Definiție.** Șirul de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  este **mărginit** dacă există un număr pozitiv  $M$ , astfel încât  $|a_n| \leq M, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$ .

**Exemplu.** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \frac{n}{n+1}$ . Atunci  $a_n = \frac{n}{n+1} < 1$ .

### 2.2 Progresii aritmetice

#### 2.2.1 Noțiunea de progresie aritmetică

**Definiție.** Un șir  $(a_n)_{n \geq 1}$  de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real  $r$ , numit

rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând  $r$  ( $a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k, k \geq 2$ ).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său  $a_1$  și rația  $r$ .

**Exemple.** a) Șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dat de  $a_n = n$  este progresie aritmetică deoarece  $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall)k, k \geq 2$ .

b) Șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dat de  $a_n = n^2$  nu este progresie aritmetică deoarece  $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$ , care nu este constantă.

### 2.2.2 Formula termenului general al progresiei aritmetice

**Teoremă.** Termenul general al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$  este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

**Exemplu.** a) Pentru progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}, a_1 = 2, r = 3$ , avem:  $a_n = a_1 + (n - 1)r = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$ .

### Aplicații

1. Să se determine progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  știind că  $a_4 = 7$  și  $a_8 = 15$ .

**Soluție.**  $a_4 = a_1 + 3r = 7$  și  $a_8 = a_1 + 7r = 15$ .  
Rezolvând sistemul obținem  $a_1 = 1$  și  $r = 2$ .

2. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică. Dacă  $a_m = n$  și  $a_n = m, m \neq n$  să se calculeze  $a_p, p \in \mathbf{N}^*$ .

**Soluție.** Avem:  $a_m = a_1 + (m - 1)r = n$  și  $a_n = a_1 + (n - 1)r = m$ . Rezolvând sistemul format obținem  $r = -1$  și

$$a_1 = m + n - 1. \text{ Atunci } a_p = a_1 + (p - 1)r = m + n - 1 - p + 1 = m + n - p.$$

3. Se consideră șirul: 1, 5, 9, ... . Determinați rangul termenului 401.

**Soluție.** Se observă că șirul este o progresie aritmetică cu primul termen  $a_1 = 1$  și rația  $r = 4$ . Notăm cu  $k$  rangul termenului 401 și avem:  $401 = 1 + (k - 1) \cdot 4 \Rightarrow k = 101$ .

### 2.2.3 Suma primilor $n$ termeni ai unei progresii aritmetice

**Teoremă.** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică și  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  suma primilor  $n$  termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

**Exemple.** a) Fiind dată progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = 3n - 1$ , avem  $a_1 = 2, a_{10} = 29$ , iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2 + 29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul 1, 3, 5, 7, ... . Acesta este progresie aritmetică cu primul termen  $a_1 = 1$  și rația  $r = 2$ . Atunci termenul 1000 este  $a_{1000} = 1 + 999 \cdot 2 = 1999$ . Suma primilor 1000 de termeni ai șirului este egală cu:

$$S_{1000} = \frac{(1 + 1999) \cdot 1000}{2} = 1\,000\,000.$$

## Aplicații

1. Să se determine progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  știind că  $a_1 + a_3 = 8$  și  $S_4 = 22$ .

**Soluție.**  $a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2r = 8 \Rightarrow a_1 + r = 4$ .

$$S_4 = 22 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_4)4}{2} = 22 \Rightarrow 2a_1 + 3r = 11.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuații obținem:  
 $a_1 = 1$  și  $r = 3$ .

2. Să se rezolve ecuația:

$$1 + 3 + 5 + \dots + x = 100.$$

**Soluție.** Notăm cu  $n$  numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este  $r = 2$ , primul termen  $a_1 = 1$  și suma  $S = 100$ . Atunci:

$$S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} = 100 \Rightarrow n = 100.$$

3. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică și  $S_k$  suma primilor  $k$  termeni ai săi. Să se demonstreze că dacă  $S_m = m$  și  $S_n = n$ ,  $m \neq n$ , atunci  $S_p = p$  ( $\forall$ )  $p \in \mathbf{N}^*$ .

**Soluție.**

$$S_m = m \Rightarrow \frac{[a_1 + a_m]m}{2} = m \Rightarrow 2a_1 + (m-1)r = 2.$$

$$S_n = n \Rightarrow \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = n \Rightarrow 2a_1 + (n-1)r = 2.$$

Scăzând membru cu membru cele două relații obținem:  
 $r(m-n) = 0 \Rightarrow r = 0$  ( $m \neq n$ ). Atunci  $a_1 = 1$ .

$$S_p = \frac{[a_1 + a_p]p}{2} = \frac{(1+1)p}{2} = p.$$

## 2.2.4 Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice

1. Fiind dată progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$ , are loc relația:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (\forall)k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  are proprietatea:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (\forall)k, k \geq 2,$$

atunci acest șir este o progresie aritmetică.

3. Fiind date numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  în progresie aritmetică, are loc relația:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \quad (\forall)k, k \geq 2.$$

### Aplicații

1. Dacă numerele  $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$  sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele  $a, b, c$  sunt în progresie aritmetică sau  $a + b + c = 0$ .

**Soluție.** Deoarece numerele  $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$  sunt în progresie aritmetică, atunci are loc relația:

$$b^2 - ac = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} \Rightarrow a^2 - bc + c^2 - ab - 2b^2 +$$

$$+ 2ac = 0 \Rightarrow (a + c)^2 - b^2 - b(a + b + c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a - b + c) - b(a + b + c)$$

$$= 0 \Rightarrow (a + b + c) \cdot$$

$$\cdot (a - 2b + c) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \text{ sau } b = \frac{a + c}{2}.$$

2. Să se arate că dacă  $a > 0, b > 0, c > 0$  sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

**Soluție.** Fie  $r$  rația progresiei. Notăm:

$$A = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{c - b} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{r}. \text{ Analog obținem:}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{2r}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{r}.$$

Evident  $2B = A + C$ .

## 2.3 Progresii geometrice

### 2.3.1 Noțiunea de progresie geometrică

**Definiție.** Un șir  $(b_n)_{n \geq 1}$  de numere reale se numește **progresie geometrică**, dacă există un număr real  $q$ , numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul înmulțit cu  $q$  ( $b_k = b_{k-1} \cdot q, (\forall)k, k \geq 2$ ).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = q, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie geometrică este bine determinată de primul termen al său  $a_1$  și rația  $q$ .

**Exemplu.** a) Șirul dat de 2, 6, 18, 54, 162 este progresie geometrică deoarece  $6 = 2 \cdot 3, 18 = 6 \cdot 3, 54 = 18 \cdot 3, 162 = 54 \cdot 3$ . Rația progresiei este 3.

### 2.3.2 Formula termenului general al progresiei geometrice

**Teoremă.** Termenul general al progresiei aritmetice  $(b_n)_{n \geq 1}$  este dat de formula:

$$b_n = b_1 q^{n-1} (\forall) n, n \geq 2.$$

**Exemplu.** a) Pentru progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$ ,  $b_1 = 2$ ,  $q = 2$ , avem:  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ .

#### Aplicații

1. Să se determine progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  știind că  $b_2 = 6$  și  $b_4 = 54$ .

**Soluție.**  $b_2 = b_1 q = 6$  și  $b_4 = b_1 q^3 = 54$ . Împărțind a doua ecuație la prima obținem  $q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$  și apoi  $b_1 = \pm 2$ .

2. Fie  $(b_n)_{n \geq 1}$  o progresie geometrică. Dacă  $b_m = n$  și  $b_n = m$ ,  $m \neq n$  să se calculeze  $b_p$ ,  $p \in \mathbf{N}^*$ .

**Soluție.** Avem:  $b_m = b_1 q^{m-1} = n$  și  $b_n = b_1 q^{n-1} = m$ . Împărțind membru cu membru cele două relații obținem:

$$q^{m-n} = \frac{n}{m} \Rightarrow q = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} \text{ și } b_1 = n \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{m-n}}.$$

3. Se consideră șirul: 1, 3, 9, 27, 81, ... Determinați rangul termenului 6561.

**Soluție.** Se observă că șirul este o progresie geometrică cu primul termen  $a_1 = 1$  și rația  $q = 3$ . Notăm cu  $k$  rangul termenului 6561 și avem:  $6561 = 1 \cdot 3^{k-1} \Rightarrow 3^{k-1} = 3^8 \Rightarrow k = 9$ .

### 2.3.3 Suma primilor $n$ termeni ai unei progresii geometrice

**Teoremă.** Fie  $(b_n)_{n \geq 1}$  o progresie geometrică cu rația  $q \neq 1$

și  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$  suma primilor  $n$  termeni ai săi.

Atunci este adevărată formula:

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, n \geq 1.$$

**Exemplu.** a) Fiind dată progresia geometrică 1, 2, 4, 8, ... avem  $b_1 = 1$ ,  $q = 2$ , iar suma primilor 9 termeni ai săi este:

$$S_9 = 1 \cdot \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 511.$$

#### Aplicații

1. Să se determine progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  știind că  $S_2 = 4$  și  $S_3 = 13$ .

**Soluție.** Avem:

$$b_1 \frac{1 - q^2}{1 - q} = 4 \text{ și } b_1 \frac{1 - q^3}{1 - q} = 13 \Rightarrow b_1(1 + q) = 4 \text{ și}$$

$$b_1(1 + q + q^2) = 13.$$

Rezolvând sistemul format obținem:  $b_1 = 1$  și  $q = 3$ .

2. Să se decidă dacă este progresie geometrică un șir astfel încât pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$  suma primilor  $n$  termeni ai săi este dată de formula  $S_n = 3n + 1$ .

**Soluție.** Pentru  $n \geq 2$ , avem  $a_n = S_n - S_{n-1} = (3n + 1) - 3(n - 1) - 1 = 3$ .  $a_1 = S_1 = 4$ . Evident șirul nu este progresie geometrică.

### 2.3.4 Alte proprietăți ale progresiilor geometrice

1. Fiind dată progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$ , are loc relația:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \quad (\forall) k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale  $(b_n)_{n \geq 1}$  are proprietatea:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \quad (\forall) k, k \geq 2$$

atunci acest șir este o progresie geometrică.

3. Fiind date numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$  în progresie geometrică are loc relația:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n \quad (\forall) k, k \geq 2.$$

#### Aplicații

1. Dacă numerele  $a, b, c$  sunt în progresie geometrică, atunci are loc egalitatea:

$$a^3(b+c)(b^2+c^2) = b^3(a+b)(a^2+b^2).$$

**Soluție.** Deoarece  $a, b, c$  sunt în progresie geometrică, rezultă că  $b^2 = ac$ . Atunci avem:

$$a^3(b+c)(b^2+c^2) = a^3(b+c)(ac+c^2) = a^2 \cdot ac(b+c) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (a+c) = b^2(ab+ac)(a^2+ac) = b^2(ab+b^2)(a^2+b^2) \\ & = \\ & = b^3(a+b)(a^2+b^2). \end{aligned}$$

2. Să se determine  $x \in \mathbf{N}$ , astfel încât numerele  $x + 1, 4x + 1, 8x + 11$  să fie în progresie geometrică.

**Soluție.** Numerele  $x + 1, 4x + 1, 8x + 11$  sunt în progresie geometrică dacă  $(4x + 1)^2 = (x + 1)(8x + 11) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 8x + 1 = 8x^2 + 8x + 11x + 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 11x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ sau } x = -\frac{5}{8}.$$

Soluția corectă este  $x = 2$ .

# CUPRINS

<b>1</b>	Mulțimi și elemente de logică matematică . . . . .	3
	1.1 Mulțimea numerelor reale . . . . .	3
	1.1.1 Numere reale . . . . .	3
	1.1.2 Operații algebrice cu numere reale . . . . .	3
	1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere . . . . .	4
	1.1.4 Ordonarea numerelor reale . . . . .	6
	1.1.5 Modulul unui număr real . . . . .	7
	1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri . . . . .	8
	1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real . . . . .	9
	1.1.8 Operații cu intervale de numere reale . . . . .	10
	1.1.9 Inegalități . . . . .	11
	1.2 Elemente de logică matematică . . . . .	14
	1.2.1 Propoziție, predicat cuantificatori . . . . .	14
	1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi . . . . .	16
	1.3 Condiții necesare, condiții suficiente . . . . .	18
	1.4 Tipuri de raționamente logice . . . . .	19
<b>2</b>	Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale . . . . .	23
	2.1 Șiruri . . . . .	23
	2.2 Progresii aritmetice . . . . .	23
	2.2.1 Noțiunea de progresie aritmetică . . . . .	23
	2.2.2 Formula termenului general al progresiei aritmetice . . . . .	24
	2.2.3 Suma primilor $n$ termeni ai unei progresii aritmetice . . . . .	25
	2.2.4 Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice . . . . .	26

2.3	Progresii geometrice	27
2.3.1	Noțiunea de progresie geometrică	27
2.3.2	Formula termenului general al progresiei geometrice	28
2.3.3	Suma primilor $n$ termeni ai unei progresii geometrice	29
2.3.4	Alte proprietăți ale progresiilor geometrice	29
<b>3</b>	Funcții, lecturi grafice	31
3.1	Noțiunea de funcție	31
3.2	Funcții numerice	32
3.3	Compunerea funcțiilor	34
<b>4</b>	Funcția de gradul I	36
4.1	Ecuția de gradul I	36
4.2	Funcția afină	36
<b>5</b>	Funcția de gradul al doilea	40
5.1	Ecuția de gradul al doilea	40
5.2	Funcția de gradul al doilea	42
<b>6</b>	Mulțimi de numere	47
6.1	Numere reale	47
6.1.1	Puteri cu exponent întreg	47
6.1.2	Radicali	47
6.1.3	Puteri cu exponent rațional	51
6.1.4	Puteri cu exponent real	51
6.2	Logaritmi	52
6.3	Mulțimea numerelor complexe	55
6.3.1	Numere complexe sub formă algebrică	55
6.3.2	Reprezentarea geometrică a numerelor complexe	58
6.3.3	Rezolvarea de ecuații în $\mathbb{C}$	60
<b>7</b>	Funcții și ecuații	62
7.1	Funcții și ecuații	62

7.1.1	Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate.	
	Funcții inverse .....	62
7.1.2	Funcția putere cu exponent natural ....	64
7.1.3	Funcția radical .....	64
7.1.4	Funcția exponențială .....	65
7.1.5	Funcția logaritmică .....	66
7.2	Ecuții .....	66
7.2.1	Ecuții, inecuații și sisteme de ecuații iraționale .....	66
7.2.2	Ecuții, inecuații și sisteme de ecuații exponențiale .....	69
7.2.3	Ecuții, inecuații și sisteme de ecuații logaritmice .....	71
<b>8</b>	Metode de numărare .....	74
8.1	Mulțimi finit ordonate .....	74
8.2	Permutări .....	75
8.3	Aranjamente .....	75
8.4	Combinări .....	75
8.5	Binomul lui Newton .....	76
<b>9</b>	Elemente de probabilități .....	78
9.1	Evenimente. Operații cu evenimente ....	78
9.2	Probabilitatea unui eveniment .....	79
9.3	Proprietăți ale probabilităților .....	80
9.4	Probabilități condiționate .....	80
9.5	Evenimente independente .....	81
9.6	Schema lui Poisson .....	81
9.7	Schema lui Bernoulli .....	82
9.8	Variabile aleatoare .....	82
<b>10</b>	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare .....	85
10.1	Permutări .....	85
10.2	Matrice .....	86

10.3	Determinanți .....	89
10.4	Matrice inversabile .....	91
10.5	Rangul unei matrice .....	92
10.6	Sisteme de ecuații liniare .....	93
<b>11</b>	<b>Structuri algebrice .....</b>	<b>97</b>
11.1	Legi de compoziție .....	97
11.2	Grupuri .....	102
11.3	Inele .....	107
11.4	Corpuri .....	110
11.5	Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ( $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_p, p$ număr prim)	112