2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale(șir)

2.1 Șiruri

Definiție. Fiind dată o mulțime oarecare A, numim **șir** de elemente din mulțimea A o funcție $f: \mathbf{N}^* \to A$.

Dacă $A \subset \mathbf{R}$, atunci șirul se numește șir de numere reale.

Notăm $f(n) = a_{n,}$ iar șirul de numere reale cu $(a_n)_{n\geq 1}$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **strict crescător** dacă $a_n < a_{n+1,} (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Exemplu. Fie $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 3n + 7$. Atunci: $a_{n+1} = 3(n + 1) + 7 = 3n + 10 > 3n + 7 = a_n$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **strict descres-cător** dacă $a_n > a_{n+1,} (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Exemplu. Fie $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = -n + 1$. Atunci: $a_{n+1} = -(n + 1) + 1 = -n < -n + 1 = a_n$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **monoton cres-cător** dacă $a_n \leq a_{n+1,} (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **monoton des-crescător** dacă $a_n \geq a_{n+1,} (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este **mărginit** dacă există un număr pozitiv M, astfel încât $|a_n| \leq M, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Exemplu. Fie $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \frac{n}{n+1}$. Atunci $a_n = \frac{n}{n+1} < 1$.

2.2 Progresii aritmetice

2.2.1 Noțiunea de progresie aritmetică

Definiție. Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numește **progresie aritmetică**, dacă există un număr real r, numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul adunând r ($a_k = a_{k-1} + r, (\forall)k,\ k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$a_k - a_{k-1} = r, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie aritmetică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația r.

Exemple. a) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n$ este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 1, (\forall)k, k \geq 2$.

b) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = n^2$ nu este progresie aritmetică deoarece $a_k - a_{k-1} = 2k - 1$, care nu este constantă.

2.2.2 Formula termenului general al progresiei aritmetice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Exemplu. a) Pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = 2$,
$r = 3$, avem: $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$.

Aplicații

1. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_4 = 7$ și $a_8 = 15$.

Soluție. $a_4 = a_1 + 3r = 7$ și $a_8 = a_1 + 7r = 15$.
Rezolvând sistemul obținem $a_1 = 1$ și $r = 2$.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_m = n$ și $a_n = m, m \neq n$ să se calculeze a_p, $p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Avem: $a_m = a_1 + (m-1)r = n$ și $a_n = a_1 + (n-1)r = m$. Rezolvând sistemul format obținem $r = -1$ și

$a_1 = m + n - 1$. Atunci $a_p = a_1 + (p-1)r = m + n - 1 - p + 1 = m + n - p$.

3. Se consideră șirul: 1, 5, 9, $\cdots$. Determinați rangul termenu-lui 401.

Soluție. Se observă că șirul este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 4$. Notăm cu k rangul termenu-lui 401 și avem: $401 = 1 + (k-1) \cdot 4 \Rightarrow k = 101$.

2.2.3 Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teoremă. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ suma primilor *n* termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, n \geq 1.$$

Exemple. a) Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 3n - 1$, avem $a_1 = 2, a_{10} = 29$, iar suma primilor 10 termeni ai săi este egală cu:

$$S_{10} = \frac{(2 + 29)10}{2} = 155.$$

b) Se consideră șirul $1, 3, 5, 7, \cdots$. Acesta este progresie aritmetică cu primul termen a_1 =1 și rația $r = 2$. Atunci termenul 1000 este $a_{1000} = 1 + 999 \cdot 2 = 1999$. Suma primilor 1000 de termeni ai șirului este egală cu:

$$S_{1000} = \frac{(1 + 1\,999) \cdot 1\,000}{2} = 1\,000\,000.$$

Aplicații

1. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 + a_3 = 8$ și $S_4 = 22$.

Soluție. $a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2r = 8 \Rightarrow a_1 + r = 4$.

$$S_4 = 22 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_4)4}{2} = 22 \Rightarrow 2a_1 + 3r = 11.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuații obținem: $a_1 = 1$ și $r = 3$.

2. Să se rezolve ecuația:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + x = 100.$$

Soluție. Notăm cu n numărul termenilor progresiei aritmetice. Rația progresiei este $r = 2$, primul termen $a_1 = 1$ și suma $S = 100$. Atunci:

$$S = \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]}{2} = 100 \Rightarrow n = 100.$$

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și S_k suma primilor *k* termeni ai săi. Să se demonstreze că dacă $S_m = m$ și $S_n = n$, $m \neq n$, atunci $S_p = p\ (\forall)p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție.

$$S_m = m \Rightarrow \frac{[a_1 + a_m]m}{2} = m \Rightarrow 2a_1 + (m-1)r = 2.$$

$$S_n = n \Rightarrow \frac{[a_1 + a_n]n}{2} = n \Rightarrow 2a_1 + (n-1)r = 2.$$

Scăzând membru cu membru cele două relații obținem: $r(m-n) = 0 \Rightarrow r = 0\ (m \neq n)$. Atunci $a_1 = 1$.

$$S_p = \frac{[a_1 + a_p]p}{2} = \frac{(1+1)p}{2} = p.$$

2.2.4 Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice

1. Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, are loc relația:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}\ (\forall)k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}\ (\forall)k, k \geq 2,$$

atunci acest șir este o progresie aritmetică.

3. Fiind date numerele $a_1, a_{2,} \cdots, a_n$ în progresie aritmetică, are loc relația:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n\ \ (\forall)k, k \geq 2.$$

Aplicații

1. Dacă numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie
aritmetică, atunci și numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică
sau $a + b + c = 0$.

Soluție. Deoarece numerele $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci are loc relația:

$$b^2 - ac = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} \Rightarrow a^2 - bc + c^2 - ab - 2b^2 +$$

$$+2ac = 0 \Rightarrow (a + c)^2 - b^2 - b(a + b + c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a - b + c) - b(a + b + c) = 0 \Rightarrow (a + b + c)\cdot$$

$$\cdot\, (a - 2b + c) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \text{ sau } b = \frac{a + c}{2}.$$

2. Să se arate că dacă $a > 0, b > 0, c > 0$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

sunt în progresie aritmetică.

Soluție. Fie r rația progresiei. Notăm:

$A = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{c-b} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r}$. Analog obținem:

$B = \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2r}$, $\quad C = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}$.

Evident $2B = A + C$.

2.3 Progresii geometrice

2.3.1 Noțiunea de progresie geometrică

Definiție. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numește **progresie geometrică**, dacă există un număr real q, numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul înmulțit cu q ($b_k = b_{k-1} \cdot q, (\forall)k$, $k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = q, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie geometrică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația q.

Exemplu. a) Șirul dat de 2, 6, 18, 54, 162 este progresie geometrică deoarece $6 = 2 \cdot 3, 18 = 6 \cdot 3,\ 54 = 18 \cdot 3$, $162 =$
$= 54 \cdot 3$. Rația progresiei este 3.

2.3.2 Formula termenului general al progresiei geometrice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$b_n = b_1 q^{n-1} (\forall) n, n \geq 2.$$

Exemplu. a) Pentru progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}, b_1 = 2,$
$q = 2$, avem: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Aplicații

1. Să se determine progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $b_2 = 6$ și $b_4 = 54$.

Soluție. $b_2 = b_1 q = 6$ și $b_4 = b_1 q^3 = 54$. Împărțind a doua ecuație la prima obținem $q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$ și apoi $b_1 = \pm 2$.

2. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică. Dacă $b_m = n$ și $b_n = m, m \neq n$ să se calculeze $b_{p,}\ p \in \mathbf{N}^*$.

Soluție. Avem: $b_m = b_1 q^{m-1} = n$ și $b_n = b_1 q^{n-1} = m$. Împărțind membru cu membru cele două relații obținem:

$$q^{m-n} = \frac{n}{m} \Rightarrow q = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} \text{ și } b_1 = n \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{m-n}}.$$

3. Se consideră șirul: 1, 3, 9, 27, 81,$\cdots$. Determinați rangul termenului 6561.

Soluție. Se observă că șirul este o progresie geometrică cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $q = 3$. Notăm cu k rangul termenu-lui 6561 și avem: $6561 = 1 \cdot 3^{k-1} \Rightarrow 3^{k-1} = 3^8 \Rightarrow k = 9$.

2.3.3 Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Teoremă. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu rația $q \neq 1$
și $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ suma primilor *n* termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, n \geq 1.$$

Exemplu. a) Fiind dată progresia geometrică $1, 2, 4, 8, \cdots$ avem $b_1 = 1,\ q = 2$, iar suma primilor 9 termeni ai săi este:

$$S_9 = 1 \cdot \frac{1-2^9}{1-2} = 511.$$

Aplicații

1. Să se determine progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $S_2 = 4$ și $S_3 = 13$.

Soluție. Avem:

$b_1 \dfrac{1-q^2}{1-q} = 4$ și $b_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} = 13 \Rightarrow b_1(1+q) = 4$ și $b_1(1+q+q^2) = 13$.

Rezolvând sistemul format obținem: $b_1 = 1$ și $q = 3$.

2. Să se decidă dacă este progresie geometrică un șir astfel încât pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ suma primilor *n* termeni ai săi este dată de formula $S_n = 3n + 1$.

Soluție. Pentru $n \geq 2$, avem $a_n = S_n - S_{n-1} = (3n+1) -$
$-3(n-1) - 1 = 3$. $a_1 = S_1 = 4$. Evident șirul nu este progresie geometrică.

2.3.4 Alte proprietăți ale progresiilor geometrice

1. Fiind dată progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$, are loc relația:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}\cdot b_{k+1}}\ \ (\forall)k, k\geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(b_n)_{n\geq1}$ are proprietatea:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}\cdot b_{k+1}}\ \ (\forall)k, k\geq 2$$

atunci acest șir este o progresie geometrică.

3. Fiind date numerele $b_1, b_2, \cdots, b_n$ în progresie geometrică are loc relația:

$$b_k\cdot b_{n-k+1} = b_1\cdot b_n\ \ (\forall)k, k\geq 2.$$

Aplicații

1. Dacă numerele a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci are loc egalitatea:

$$a^3(b+c)(b^2+c^2) = b^3(a+b)(a^2+b^2).$$

Soluție. Deoarece a, b, c sunt în progresie geometrică, rezultă că $b^2 = ac$. Atunci avem:

$a^3(b+c)(b^2+c^2) = a^3(b+c)(ac+c^2) = a^2\cdot ac(b+c)\cdot$

$\cdot(a+c) = b^2(ab+ac)(a^2+ac) = b^2(ab+b^2)(a^2+b^2) =$

$= b^3(a+b)(a^2+b^2).$

2. Să se determine $x\in \mathbf{N}$, astfel încât numerele $x+1, 4x+1,$ $8x+11$ să fie în progresie geometrică.

Soluție. Numerele $x+1, 4x+1, 8x+11$ sunt în progresie geometrică dacă $(4x+1)^2 = (x+1)(8x+11)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x^2 + 8x + 1 = 8x^2 + 8x + 11x + 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x^2 - 11x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ sau $x {-}{=} \frac{5}{8}$.

Soluția corectă este $x = 2$.

C U P R I N S