

1.4 Limite de funcții

1.4.1 Limita unei funcții într-un punct, limite laterale

Definiție. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ și $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f are **limită** în punctul a dacă există numărul $L \in \overline{\mathbf{R}}$ cu proprietatea că pentru orice vecinătate V a lui L , există o vecinătate U a lui a , astfel încât pentru orice $x \in D \cap (U - \{a\})$ avem $f(x) \in V$.

Notăm limita funcției f în punctul a cu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Teoremă. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ și $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D . Atunci funcția f are **limită** în punctul a dacă și numai dacă există numărul $L \in \overline{\mathbf{R}}$ astfel încât, pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n \in D$ și care are limita a , șirul $(f(a_n))_{n \geq 1}$ are limita L .

Observație. Dacă funcția $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ are limită în a , punct de acumulare pentru D , atunci limita este unică.

Exemplu. Pentru funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 3$, avem:
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$, deoarece pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n \rightarrow 1$, șirul $(f(a_n))_{n \geq 1}$, $f(a_n) = a_n + 3$ converge către $1 + 3 = 4$.

Definiție. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ și $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f nu are **limită** în punctul a dacă este îndeplinită una din situațiile:

- $(\exists)(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n \in D - \{a\}$, $a_n \rightarrow a$, astfel încât $(f(a_n))_{n \geq 1}$ să nu aibă limită.
- $(\exists)(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $a_n, b_n \in D - \{a\}$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow a$, astfel încât șirurile $(f(a_n))_{n \geq 1}$ și $(f(b_n))_{n \geq 1}$, să aibă limite diferite.

Exemplu. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ și $a = +\infty$.
Considerăm șirurile cu termenul general $a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ și $b_n =$

$= 2n\pi$. Prin calcul $f(a_n) = 1$ și $f(b_n) = 0$ și deci nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$.

Definiție. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ și $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f are **limită la stânga** în punctul a dacă și numai dacă există numărul $L_s \in \bar{\mathbf{R}}$ astfel încât, pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n \in D - \{a\}$, $a_n < a$ și care are limita a , șirul $(f(a_n))_{n \geq 1}$ are limita L_s .

Notație. Pentru limita la stânga a funcției f în punctul a putem folosi una din notațiile:

$$L_s = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Definiție. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ și $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f are **limită la dreapta** în punctul a dacă și numai dacă există numărul $L_d \in \bar{\mathbf{R}}$ astfel încât, pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n \in D - \{a\}$, $a_n > a$ și care are limita a , șirul $(f(a_n))_{n \geq 1}$ are limita L_d .

Notație. Pentru limita la dreapta a funcției f în punctul a putem folosi una din notațiile:

$$L_d = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Exemplu. Pentru funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$ avem: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 1$.

Definiție. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ și $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f are **limită** în punctul a dacă și numai dacă limitele laterale ale funcției în punctul a există și sunt egale.

Exemplu. Pentru funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$

avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x + 1) = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x + 1) = 1$$

și atunci rezultă că funcția f are limită în punctul 0.

1.4.2 Criterii de limită

1. Criteriul majorării pentru limitele finite

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D . Dacă $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ și $(\exists)L \in \mathbf{R}$ astfel încât $|f(x) - L| \leq g(x)$, atunci:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Exemplu. Să calculăm: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Avem: $\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| \rightarrow 0$ când $x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

2. Criteriul majorării pentru limitele infinite

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D și $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)x \in D$. Atunci:

a) Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$;

b) Dacă $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple. a) $f(x) = x + \sin^2 x \geq x \rightarrow +\infty$, când $x \rightarrow +\infty$.
Atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) = x - \cos^2 x \leq x \rightarrow -\infty$, când $x \rightarrow -\infty$. Atunci:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3. Criteriul cleștelui

Fie $f, g, h: D \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D și V o vecinătate a lui a astfel încât $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $(\forall)x \in$

$\in V \cap (D - \{a\})$. Atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Exemplu. Să arătăm că $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \sin \frac{1}{x} = 0$.

Avem: $-x^4 \leq x^4 \sin \frac{1}{x} \leq x^4$ (\forall) $x \in \mathbf{R}^*$ și $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^4) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ și atunci rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \sin \frac{1}{x} = 0$.

1.4.3 Operații cu limite de funcții

1. Adunarea: limita sumei este egală cu suma limitelor

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$.

Dacă operația $L_1 + L_2$ are sens în $\bar{\mathbf{R}}$, atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

2. Produsul: limita produsului este egală cu produsul limitelor

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$.

Dacă operația $L_1 \cdot L_2$ are sens în $\bar{\mathbf{R}}$, atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

3. Raportul: limita raportului este egală cu raportul limitelor

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D , $g(x) \neq 0$, (\forall) $x \in D$ și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$.

Dacă operația $\frac{L_1}{L_2}$ are sens în $\bar{\mathbf{R}}$, atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

4. Puterea: limita unei puteri este egală cu puterea limitelor

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \bar{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$. Dacă operația $L_1^{L_2}$ are sens în $\bar{\mathbf{R}}$ și există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(x)^{g(x)}$ să aibă sens pentru orice $x \in V \cap (D - \{a\})$ atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Aplicații

- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + \lim_{x \rightarrow \infty} x + 1 = +\infty + \infty + 1 = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty - \infty + 1 = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 2}{x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)} = \frac{1^2 - 1 + 2}{1 + 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)^{x-1} = \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \right)^{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)} = 2^0 = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 5)^{3x+1} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x + 5) \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} (3x+1)} = 5^1 = 5.$

1.4.4 Limite de funcții compuse

Teoremă. Fie funcțiile $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, $u: A \rightarrow D$ și a un punct de acumulare pentru A . Dacă sunt îndeplinite condițiile:

- $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$
- $u(x) \neq b, (\forall)x \in A, x \neq a$
- $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$

atunci funcția compusă $f \circ u$ are limită în punctul a și

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ u)(x) = L.$$

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)^2 = \left[\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) \right]^2 = 1^2 = 1.$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 2} = \frac{\left[\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) \right]^2}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right)^2 + 2} = \frac{2^2}{0^2 + 2} = \frac{4}{2} = 2.$$

1.4.5 Limitele funcțiilor elementare

1. Funcția polinomială

a) Fie $P(x)$ o funcție polinomială cu coeficienți reali și $a \in \mathbf{R}$.
Atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$$

b) Fie $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, n \geq 1, a_0 \neq 0$. Atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = a_0(+\infty), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = a_0(-\infty)^n.$$

Exemple.

- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 1) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 11.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 2x - 1) = 3 \cdot (+\infty) = +\infty.$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x + 7) = (-2) \cdot (-\infty)^2 = -\infty.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 2x^2 + x + 4) = 2 \cdot (-\infty)^3 = -\infty.$$

2. Funcția rațională

a) Fiind date funcțiile polinomiale P și Q , atunci funcția:

$$\frac{P}{Q} : \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

are limită într-un punct a în care nu se anulează numitorul și:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

b) Fie: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$. atunci avem:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } n = m \\ \frac{a_0}{b_0} (+\infty), & \text{dacă } n > m \end{cases}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } n = m \\ \frac{a_0}{b_0} (-\infty)^{n-m}, & \text{dacă } n > m \end{cases}$$

Exemple

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2} = \frac{1^2 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-1}{+1} = -1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{3}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1 - \frac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = (-\infty) \cdot 1 = -\infty.$$

3. Funcția radical

a) Dacă $a \geq 0$ și $n \in \mathbf{N}^*$ atunci:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

b) Dacă $a \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}^*$ atunci:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n+1]{x} = \sqrt[n+1]{a}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n+1]{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{x} = \infty.$$

Exemple.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{5x+2} = \sqrt[3]{-10+2} = \sqrt[3]{-8} = -2.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+3} = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x+5} = -\infty.$

4. Funcția exponențială

a) Fie $a > 0, a \neq 1$ și $x_0 \in \mathbf{R}$, arbitrar. Atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}.$$

b) Dacă $a > 1$, atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

c) Dacă $0 < a < 1$, atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow 2} 3^x = 3^2 = 9;$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} 4^x = +\infty;$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0;$ 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0;$ 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty.$

4. Funcția logaritmică

a) Fie $a > 0, a \neq 1$ și $x_0 \in \mathbf{R}, x_0 > 0$ arbitrar. Atunci avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

b) Dacă $a >$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$$

c) Dacă $0 < a < 1$, atunci avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty.$$

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \log_3(x + 1) = \log_3(2 + 1) = 1$;

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \log_2(x - 1) = -\infty$; 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) = +\infty$.

5. Funcția sinus

Pentru $a \in \mathbf{R}$ avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

Observație. Nu există $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$.

Exemplu. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

6. Funcția cosinus

Pentru $a \in \mathbf{R}$ avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

Observație. Nu există $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$.

Exemplu. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

7. Funcția tangentă

Pentru $a \in \mathbf{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$$

Observație. Nu există $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} x$.

Exemplu. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

8. Funcția cotangentă

Pentru $a \in \mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$$

Observație. Nu există $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ctg} x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ctg} x$.

Exemplu. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$.

9. Funcția arcsinus

Pentru $a \in [-1, 1]$ avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \arcsin x = \arcsin a$$

Exemplu. $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0.$

10. Funcția arccosinus

Pentru $a \in [-1, 1]$ avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \arccos x = \arccos a$$

Exemplu. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \arccos x = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$

11. Funcția arctg

Pentru $a \in \mathbf{R}$ avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Exemplu. $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$

12. Funcția arcctg

Pentru $a \in \mathbf{R}$ avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} a.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

CUPRINS

1	Limite de funcții	3
	1.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală	3
	1.1.1 Operații algebrice cu numere reale	3
	1.1.2 Ordonarea numerelor reale	4
	1.1.3 Modulul unui număr real	4
	1.1.4 Operații cu intervale de numere reale	5
	1.1.5 Mulțimi mărginite	6
	1.1.6 Marginile unei mulțimi	7
	1.1.7 Vecinătăți, puncte de acumulare	8
	1.2 Funcții reale de variabilă reală	8
	1.3 Șiruri de numere reale	9
	1.3.1 Noțiunea de șir	9
	1.3.2 Limite de șiruri	9
	1.3.3 Proprietăți ale șirurilor care au limită	10
	1.3.4 Șiruri monotone și mărginite	11
	1.3.5 Proprietăți ale șirurilor convergente	12
	1.3.6 Calculul limitelor unor șiruri	12
	1.3.7 Trecerea la limită în inegalități	13
	1.3.8 Criterii de convergență	14
	1.3.9 Alte criterii de convergență	18
	1.3.10 Lema lui Stolz-Cesaro	19
	1.3.11 Numărul e	20
	1.3.12 Constanta lui Euler	21
	1.3.13 Operații cu șiruri convergente	21
	1.3.14 Șiruri definite prin relații de recurență	24
	1.4 Limite de funcții	28
	1.4.1 Limita unei funcții într-un punct, limite laterale	28

	1.4.2 Criterii de limită	30
	1.4.3 Operații cu limite de funcții	31
	1.4.4 Limite de funcții compuse	33
	1.4.5 Limitele funcțiilor elementare	33
	1.4.6 Limite remarcabile	40
2	Funcții continue	44
	2.1 Studiul continuității în puncte de pe dreapta reală	44
	2.2 Operații cu funcții continue	47
	2.3 Proprietăți ale funcțiilor continue	51
3	Funcții derivabile	54
	3.1 Derivata unei funcții într-un punct	54
	3.2 Derivate laterale	56
	3.3 Derivatele unor funcții uzuale	59
	3.4 Operații cu funcții derivabile	61
	3.4.1 Operații algebrice cu funcții derivabile ..	61
	3.4.2 Derivarea funcțiilor compuse	63
	3.4.3 Derivarea funcțiilor inverse	63
	3.4.4 Formule de derivare a funcțiilor compuse	63
	3.4.5 Funcții de n ori derivabile	65
	3.5 Funcții derivabile pe un interval.	66
	3.5.1 Puncte de extrem	66
	3.5.2 Teorema lui Fermat	66
	3.5.3 Teorema lui Rolle	67
	3.5.4 Teorema lui Lagrange	68
	3.6 Regulile lui l'Hospital	69
4	Reprezentarea grafică a funcțiilor	73
	4.1 Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	73
	4.2 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor ...	74
	4.3 Asimptotele funcțiilor	75
	4.4 Demonstrarea unor inegalități	78
	4.5 Etapele reprezentării grafice a funcțiilor	81
5	Primitive	85
	5.1 Primitivele unei funcții	85

5.1.1	Noțiunea de primitivă	85
5.1.2	Integrala nedefinită	85
5.1.3	Formule ale integralelor nedefinite	86
5.2	Metode de integrare	88
5.2.1	Metoda integrării prin părți	88
5.2.2	Metoda integrării prin schimbarea de variabilă	90
5.3	Integrarea funcțiilor raționale	92
5.3.1	Definirea funcțiilor raționale	92
5.3.2	Integrarea funcțiilor raționale simple	93
5.3.3	Integrarea funcțiilor raționale oarecare	96
5.4	Integrarea funcțiilor trigonometrice	98
6	Integrala definită	100
6.1	Funcții integrabile	100
6.1.1	Diviziuni	100
6.1.2	Sume Riemann, sume Darboux	101
6.1.3	Noțiunea de integrală definită	101
6.1.4	Formula lui Leibniz-Newton	103
6.1.5	Clase de funcții integrabile	104
6.1.6	Proprietăți ale funcțiilor integrabile	105
7	Metode de calcul pentru integrale definite	107
7.1	Metoda de integrare prin părți	107
7.2	Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă	108
8	Aplicații ale integralei definite	109
8.1	Aria unei suprafețe plane	109
8.2	Volumul corpurilor de rotație	110