# Algebră

# 1. Mulțimi și elemente de logică matematică

## 1.1 Mulțimea numerelor reale

### 1.1.1 Numere reale

**1)** Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1,\ 2, \cdots, \}$.

**2)** Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0,\ 1, 2, \cdots, \}$.

**3)** Mulțimea numerelor raționale: $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\right\}$.

**4)** Mulțimea numerelor iraționale, formată din numerele reprezentate de o fracție zecimală, infinită, neperiodică și pe care o notăm $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

**5)** Mulțimea numerelor reale: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \varnothing$.

**6)** O fracție $\frac{m}{n}$ este ireductibilă dacă c.m.m.d.c. $(m, n) = 1$.

**Exemple**: $\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{3}{8}$.

**7)** O fracție ordinară $\frac{m}{n}$ este reductibilă dacă există cel puțin un număr prim prin care fracția se poate simplifica.

**Exemple**: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

**8)** Fracțiile ordinare care reprezintă numărul rațional $\frac{m}{n}$ se transformă în fracție zecimală după formula: $\frac{m}{n} = a, a_1 a_2 a_3 \cdots$.

**Exemple**: $\frac{1}{3}$ $=0,(3)$ - fracție zecimală periodică simplă

$\frac{5}{12}$ =0,41(6) - fracție zecimală periodică mixtă.

### 1.1.2 Operații algebrice cu numere reale

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adu-narea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor

de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

**a) Proprietățile adunării**

**1)** Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
**2)** Comutativitatea: $x + y = y + x$ $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
**3)** Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
**4)** Element opus: : $x + (-x) = (-x) + x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$; numărul $-x$
se numește opusul lui $x$.

**b) Proprietățile înmulțirii**

**1)** Asociativitatea: $(xy)z = x(yz)$ $(\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
**2)** Comutativitatea: $xy = yx$ $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
**3)** Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
**4)** Element inversabil : $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$; numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui $x$.

**c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare**

**1)** Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x(y + z) = xy + xz \ (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}.$$

**Observație**. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.
a) $x - y = x + (-y), (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;

b) $x : y = x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0$.

### 1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

#### a) Formule de calcul prescurtat

**1)** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
**2)** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
**3)** $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
**4)** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
**5)** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
**6)** $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
**7)** $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$;
**8)** $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
**9)** $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
**10)** $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,
$n \geq 2, n \in$ **N**;
**11)** $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$,
$n \geq 2,\ n \in$ **N** , impar.

#### b) Alte formule algebrice utile

**1)** $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;
**2)** $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$;
**3)** $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 -$
$-2a^2b^2$;
**4)** $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
**5)** $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2)$;
**6)** $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$;
**7.** $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$

$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$;

**8)** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - -ac - bc) = \frac{1}{2} (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$.

**9)** $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

### c) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

**1)** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

**2)** $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$;

**3)** $(a^m)^n = a^{mn}$;

**4)** $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;

**5)** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$.

## Aplicații

**1.** Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b = 1$, atunci:

a) $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$ b) $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$.

**Soluție**: Se aplică formulele **1)** și **2)** de la **1.1.3** b).

**2.** Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b + c = 0$, atunci: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

**Soluție**: Se aplică formula **8)** de la **1.1.3** b).

**3.** Să se descompună în factori:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

**Soluție**: $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2b - a^2c + +b^2c - b^2a + c^2a - c^2b = ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + +c^2(a-b) = (a-b)(ab - ac - bc + c^2) = (a-b)(b - -c)(a-c)$.

### 1.1.4 Ordonarea numerelor reale

Introducem pe **R** relațiile $<$ respectiv $\leq$ astfel:
a) $x < y$ dacă $y - x > 0$;
b) $x \leq y$ dacă $y - x \geq 0$.

**a) Proprietatea de trihotomie.** Oricare ar fi $x, y \in$ **R** este adevărată una și numai una din relațiile $x < y, x = y, x > y$.

**b) Proprietățile relației $\leq$ :**
**1)** $x \leq x, (\forall) x \in$ **R** (reflexivitate);
**2)** $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie);
**3)** $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate).

Relația $\leq$, este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă și deci este o **relație de ordine** pe mulțimea **R**.

Relația $<$ este tranzitivă, dar nu este reflexivă și antisimetrică și deci nu este relație de ordine pe mulțimea **R**.

**c)** Relația $\leq$ este o **relație de ordine totală** pe **R**, deoarece $(\forall) x, y \in$ **R** avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

**d) Proprietăți de legătură** ale relației $\leq$ cu operațiile de adunare și înmulțire:
**1)** $x \leq y, z \in \mathrm{R} \Rightarrow x + z \leq y + z$;
**2)** $x \leq y, z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$;
**3)** $x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$;
**4)** $x \leq y, z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$;
**5)** $x \leq y, z \leq t,\ x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$, implică $\Rightarrow xz \leq yt$.

### Aplicații

**1**. Să se compare numerele: $a = 2^{99}$ și $b = 9^{33}$.

**Soluție**: $a = 2^{99} = (2^{11})^9 = 2048^9$; $b = 9^{33} = 3^{66} >$ $> 3^{63} = 2187^9$. Atunci $a = 2048^9 < 2187^9 = b$. Deci $a < b$.

**2**. Fiind dat $a \in \mathbf{R}$, să se compare numerele: $2a$ și $a + 1$.

**Soluție**: $2a \leq a + 1 \Leftrightarrow a \leq 1$ și $2a > a + 1 \Leftrightarrow a > 1$. Deci, dacă $a \leq 1$, ordinea este $2a, a + 1$, iar dacă $a > 1$, ordinea este $a + 1, 2a$.

### 1.1.5 Modulul unui număr real

**Definiție**. Valoarea absolută sau modulul unui număr real $x$ se definește astfel: $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

**Proprietăți**:

**1)** $|x| \geq 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
**2)** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
**3)** $|-x| = |x|, (\forall) x \in \mathbf{R}$;
**4)** $|xy| = |x| \cdot |y|, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$;
**5)** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}, y \neq 0$;
**6)** $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, (\forall) x, y \in \mathbf{R}$;
**7)** $|x| = a \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a = 0 \\ \pm a, \text{ dacă } a > 0 \end{cases}$;
**8)** $|x| < a, a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$;
**9)** $|x| > a, a > 0 \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$.

## Aplicații

**1.** Rezolvați în **R** ecuațiile:

a) $|x + 2| = 6$   b) $\big|x - |x + 1|\big| = 1$.

**Soluție.** a) $|x+2| = 6 \Leftrightarrow x+2 = \pm 6 \Leftrightarrow x = 4$ sau $x = -8$.

b) $\big|x - |x+1|\big| = 1 \Leftrightarrow x - |x+1| = \pm 1 \Leftrightarrow |x+1| = x - 1$ și
$|x+1| = x+1$.

1) Dacă $x \leq -1$, ecuațiile devin: $-x-1 = x-1$ și $-x-1 = = x+1$ cu soluțiile $x = 0$ și $x = -1$, corectă fiind doar $-1$.

2) Dacă $x > -1$, ecuațiile devin: $x+1 = x-1$ și $x+1 = x+ +1$. Prima ecuație nu are soluție, iar a doua ecuație are soluție orice $x > -1$.

### 1.1.6. Aproximări, trunchieri, rotunjiri

**1)** Fiind dat numărul real pozitiv $x = a, a_1 a_2 \dots a_n \cdots$ atunci:

a) aproximația prin lipsă de ordinul $n$ a lui $x$ este:

$$x_n' = a, a_1 a_2 \dots a_n$$

b) aproximația prin adaos de ordinul $n$ a lui $x$ este:

$$x_n'' = a, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n} .$$

**2)** Fiind dat numărul real negativ $x = -a, a_1 a_2 \dots a_n \cdots$ atunci:

a) aproximația prin lipsă de ordinul $n$ a lui $x$ este:

$$x_n' = -a, a_1 a_2 \dots a_n - 10^{-n}$$

b) aproximația prin adaos de ordinul $n$ a lui $x$ este:

$$x_n'' = -a, a_1 a_2 \dots a_n .$$

**3)** Fiind dat numărul real $x = a, a_1 a_2 \dots a_n \cdots$ atunci trunchierea de ordinul $n$ a lui $x$ este $x_n' = a, a_1 a_2 \dots a_n$.

**4)** Fiind dat numărul real $x = a, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \cdots$ atunci rotunjirea lui $x$ la a $n$-a zecimală se calculează astfel:

a) Dacă $a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, atunci $x_n = a, a_1 a_2 \dots a_n$.

b) Dacă $a_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, atunci $x_n = a, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$.

### Aplicații

**1)** Scrieți pentru $a = \sqrt{3}$ și $b = -\sqrt{3}$ :

a) aproximațiile zecimale de ordinul 2;
b) trunchierile de ordinul 3;
c) rotunjirile la a 4-a zecimală.

**Soluție.** $\sqrt{3} = 1{,}7320508\cdots$ și $-\sqrt{3} = -1{,}7320508\cdots$.
a) $a_2' = 1{,}73, a_2'' = 1{,}74$ și $b_2' = -1{,}74, b_2'' = -1{,}73.$
b) $a_2' = 1{,}732$ și $b_2' = -1{,}732.$
c) $a_2 = 1{,}7321$ și $b_2 = -1{,}7321.$

## 1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

**Axioma lui Arhimede.** Pentru orice număr real $x$, există și este unic numărul întreg $n$ astfel încât $x \in [n, n+1)$.

**Definiție**. Fiind dat numărul real $x$, numim partea întreagă a lui $x$ și o notăm cu $[x]$, cel mai mare număr întreg, care este mai mic sau egal cu $x$.

**Definiție**. Fiind dat numărul real $x$, numim partea fracționară a lui $x$ și o notăm cu $\{x\}$, diferența dintre numărul $x$ și partea lui întreagă ( $x - \{x\}$).

**Exemple.** $[1{,}7] = 1, [-2{,}3] = -3;\ \{5{,}2\} = 0{,}2, \{-3{,}1\} = 0{,}9.$

### Aplicații

**1**. Să se calculeze: $\left[\sqrt{n(n+1)}\right]$ și $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$.

**Soluție.** Se arată că:

$$n \leq \sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)}\right] = n.$$

$\{\sqrt{n(n+1)}\} = \sqrt{n(n+1)} - [\sqrt{n(n+1)}] =$
$\sqrt{n(n+1)} - n.$

**2.** Fie $x, y \in$ **R**. Să se demonstreze că:

$$\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$

**Soluție**: $x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\} \Rightarrow x - y =$
$= [x] - [y] + \{x\} - \{y\}$. Evident: $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$.

### 1.1.8 Operații cu intervale de numere reale

Fiind date numerele $a, b \in$ **R**, $a < b$, definim următoarele submulțimi ale lui **R** pe care le numim intervale:

**1)** $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - interval închis în $a$ și $b$
**2)** $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ - interval deschis în $a$ și $b$
**3)** $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval închis în $a$, deschis în $b$
**4)** $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ - interval deschis în $a$, închis în $b$
**5)** $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ - interval închis la stânga în $a$ și nemărginit la dreapta
**6)** $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ - interval deschis la stânga în $a$ și nemărginit la dreapta
**8)** $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ - interval nemărginit la stânga și închis la dreapta în $b$
**9)** $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ - interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta în $b$.

Operațiile cu intervale se definesc la fel ca operațiile cu mulțimi.

**Distanța euclidiană** dintre numerele reale $a$ și $b$ se definește ca fiind numărul $d(a, b) = |a - b|$.

## Aplicații

**1**. Scrieți sub formă de intervale următoarele mulțimi:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}$ b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\}$.

**Soluție.** a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\} = (-\infty, 3]$.

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\} = (1, 5)$.

**2**. Să se determine mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\}.$$

**Soluție.** $d(x, 3) < 5 \Leftrightarrow |x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < x < 8$. Atunci: $\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\} = (-2, 8)$.

## 1.1.9 Inegalități

Pentru a demonstra inegalități, ne bazăm pe proprietățile relației de ordine pe mulțimea **R**. Se folosesc transformările echivalente și se obține o sumă de pătrate mai mare sau egală cu zero.

**a) Inegalități ce pot fi folosite în cadrul demonstrării altor inegalități**.

**1)** Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

**Soluție.** $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

**2)** Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

**Soluție.** $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$.

**3)** Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.

**Soluție.** $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

**4)** Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

**Soluție.** $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

**5)** Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$.

**Soluție.** $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

**6)** Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

**Soluție.** $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

**7)** Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

**Soluție.** $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

**8)** Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

**Soluție.** $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$.

**9)** Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

**Soluție.** Se folosește identitatea **8)** de la **1.1.3 b)** :
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.
Se înlocuiește $a^3$ cu $a$, $b^3$ cu $b$ și $c^3$ cu $c$ și se obține inegalitatea

dorită.

**10.** Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2.$$

(Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski)

**Soluție.** După efectuarea calculelor se obține $(ay -$
$bx)^2 \geq$
$\geq 0$.

**11**. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a + x)^2 + (b + y)^2}.$$

(Inegalitatea lui Minkovski)

**Soluție.** După ridicarea la pătrat se obține inegalitatea:

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by.$$

a) Dacă $ax + by \leq 0$, inegalitatea este evident adevărată.
b) Dacă $ax + by > 0$, ridicând la pătrat ambii membri ai inegalității obținem: $(ay - bx)^2 \geq 0$.

## Aplicații

**1.** Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

**Soluție.** Se aplică inegalitatea **3)** și obținem:
$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}$. Se adună membru cu membru cele trei inegalități.

**2.** Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$ avem:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

**Soluție.** Se aplică inegalitatea **8)** pentru numerele reale $ab, bc, ca$ și se obține: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 +$

$+a^2bc = abc(a+b+c)$.

**3.** Să se arate că dacă $a, b > 0, a + b = 1,$ atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $ab \leq \frac{1}{4}$ b) $2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2$.

**Soluție.** a) $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$.

b) $2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2(a+b)^3 - 6ab(a+b) \geq$
$\geq (a+b)^2 - 2ab \Leftrightarrow 2 - 6ab \geq 1 - 2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4}$**.**

**4.** Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0,$ atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $a^2 \geq 4bc$ b) $ab + bc + ca \leq 0$.

**Soluție.** a) $a^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (-b-c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \geq 4bc \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$.

b) $ab + bc + ca \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \geq 0$.

# C U P R I N S

## Algebră

## Analiză matematică

## Trigonometrie

## Geometrie