

Algebră

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Numere reale

- 1) Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- 2) Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- 3) Mulțimea numerelor raționale: $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\}$.
- 4) Mulțimea numerelor iraționale, formată din numerele reprezentate de o fracție zecimală, infinită, neperiodică și pe care o notăm $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.
- 5) Mulțimea numerelor reale: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

- a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \emptyset$.

- 6) O fracție $\frac{m}{n}$ este ireductibilă dacă c.m.m.d.c. $(m, n) = 1$.

Exemple: $\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{3}{8}$.

- 7) O fracție ordinară $\frac{m}{n}$ este reductibilă dacă există cel puțin un număr prim prin care fracția se poate simplifica.

Exemple: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

- 8) Frațiile ordinare care reprezintă numărul rațional $\frac{m}{n}$ se transformă în fracție zecimală după formula: $\frac{m}{n} = a, a_1 a_2 a_3 \dots$.

Exemple: $\frac{1}{3} = 0, (3)$ - fracție zecimală periodică simplă

$$\frac{5}{12} = 0,41(6) - \text{fracție zecimală periodică mixtă.}$$

1.1.2 Operații algebrice cu numere reale

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor

de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

- 1) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z) (\forall)x, y, z \in \mathbf{R};$
- 2) Comutativitatea: $x + y = y + x (\forall)x, y \in \mathbf{R};$
- 3) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x (\forall)x \in \mathbf{R};$
- 4) Element opus: $x + (-x) = (-x) + x (\forall)x \in \mathbf{R};$ numărul $-x$ se numește opusul lui x .

b) Proprietățile înmulțirii

- 1) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz) (\forall)x, y, z \in \mathbf{R};$
- 2) Comutativitatea: $xy = yx (\forall)x, y \in \mathbf{R};$
- 3) Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x (\forall)x \in \mathbf{R};$
- 4) Element inversabil : $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1 (\forall) x \in \mathbf{R}, x \neq 0;$ numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x .

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

- 1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:
$$x(y + z) = xy + xz (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

- a) $x - y = x + (-y), (\forall)x, y \in \mathbf{R};$

b) $x:y = x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0.$

1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

a) Formule de calcul prescurtat

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$

3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$

4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$

5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$

6) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$

7) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc;$

8) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$

9) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$

10) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$

$n \geq 2, n \in \mathbf{N};$

11) $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}),$

$n \geq 2, n \in \mathbf{N}, \text{ impar.}$

b) Alte formule algebrice utile

1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab;$

2) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b);$

3) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a + b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2;$

4) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4);$

5) $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2);$

6) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc;$

7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2];$$

$$8) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \frac{1}{2} (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].$$

$$9) \quad (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

c) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

$$1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$2) \quad a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0;$$

$$3) \quad (a^m)^n = a^{mn};$$

$$4) \quad (ab)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0.$$

Aplicații

1. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b = 1$, atunci:

$$a) \quad a^2 + b^2 = 1 - 2ab \qquad b) \quad a^3 + b^3 = 1 - 3ab.$$

Soluție: Se aplică formulele 1) și 2) de la 1.1.3 b).

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât $a + b + c = 0$, atunci: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Soluție: Se aplică formula 8) de la 1.1.3 b).

3. Să se descompună în factori:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

Soluție:

$$\begin{aligned} & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2b - \\ & a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b = ab(a-b) - \\ & c(a^2 - b^2) + \\ & + c^2(a-b) = (a-b)(ab - ac - bc + c^2) = (a-b)(b - \\ & -c)(a-c). \end{aligned}$$

1.1.4 Ordonarea numerelor reale

Introducem pe \mathbf{R} relațiile $<$ respectiv \leq astfel:

- a) $x < y$ dacă $y - x > 0$;
- b) $x \leq y$ dacă $y - x \geq 0$.

a) Proprietatea de trihotomie. Oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ este adevărată una și numai una din relațiile $x < y, x = y, x > y$.

b) Proprietățile relației \leq :

- 1) $x \leq x, (\forall)x \in \mathbf{R}$ (reflexivitate);
- 2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie);
- 3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate).

Relația \leq , este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă și deci este o **relație de ordine** pe mulțimea \mathbf{R} .

Relația $<$ este tranzitivă, dar nu este reflexivă și antisimetrică și deci nu este relație de ordine pe mulțimea \mathbf{R} .

c) Relația \leq este o relație de ordine totală pe \mathbf{R} , deoarece $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

d) Proprietăți de legătură ale relației \leq cu operațiile de adunare și înmulțire:

- 1) $x \leq y, z \in \mathbf{R} \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- 2) $x \leq y, z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$;
- 3) $x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$;
- 4) $x \leq y, z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$;
- 5) $x \leq y, z \leq t, x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$, implică $\Rightarrow xz \leq yt$.

Aplicații

- 1. Să se compare numerele: $a = 2^{99}$ și $b = 9^{33}$.

Soluție: $a = 2^{99} = (2^{11})^9 = 2048^9$; $b = 9^{33} = 3^{66} > 3^{63} = 2187^9$. Atunci $a = 2048^9 < 2187^9 = b$. Deci $a < b$.

2. Fiind dat $a \in \mathbf{R}$, să se compare numerele: $2a$ și $a + 1$.

Soluție: $2a \leq a + 1 \Leftrightarrow a \leq 1$ și $2a > a + 1 \Leftrightarrow a > 1$.

Deci, dacă $a \leq 1$, ordinea este $2a, a + 1$, iar dacă $a > 1$, ordinea este $a + 1, 2a$.

1.1.5 Modulul unui număr real

Definiție. Valoarea absolută sau modulul unui număr real x se definește astfel: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți:

- 1) $|x| \geq 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$;
- 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 3) $|-x| = |x|, (\forall)x \in \mathbf{R}$;
- 4) $|xy| = |x| \cdot |y|, (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- 5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (\forall)x, y \in \mathbf{R}, y \neq 0$;
- 6) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- 7) $|x| = a \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a = 0 \\ \pm a, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$;
- 8) $|x| < a, a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$;
- 9) $|x| > a, a > 0 \Leftrightarrow x < -a \text{ sau } x > a$.

Aplicații

1. Rezolvați în \mathbf{R} ecuațiile:

a) $|x + 2| = 6$

b) $|x - |x + 1|| = 1$.

Soluție. a) $|x + 2| = 6 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 6 \Leftrightarrow x = 4$ sau $x = -8$.

b) $|x - |x + 1|| = 1 \Leftrightarrow x - |x + 1| = \pm 1 \Leftrightarrow |x + 1| = x - 1$ și $|x + 1| = x + 1$.

1) Dacă $x \leq -1$, ecuațiile devin: $-x - 1 = x - 1$ și $-x - 1 = x + 1$ cu soluțiile $x = 0$ și $x = -1$, corectă fiind doar -1 .

2) Dacă $x > -1$, ecuațiile devin: $x + 1 = x - 1$ și $x + 1 = x + 1$. Prima ecuație nu are soluție, iar a doua ecuație are soluție orice $x > -1$.

1.1.6. Aproximări, trunchieri, rotunjiri

1) Fiind dat numărul real pozitiv $x = a, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ atunci:

a) aproximația prin lipsă de ordinul n a lui x este:

$$x'_n = a, a_1 a_2 \dots a_n$$

b) aproximația prin adaos de ordinul n a lui x este:

$$x''_n = a, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}.$$

2) Fiind dat numărul real negativ $x = -a, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ atunci:

a) aproximația prin lipsă de ordinul n a lui x este:

$$x'_n = -a, a_1 a_2 \dots a_n - 10^{-n}$$

b) aproximația prin adaos de ordinul n a lui x este:

$$x''_n = -a, a_1 a_2 \dots a_n.$$

3) Fiind dat numărul real $x = a, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ atunci trunchierea de ordinul n a lui x este $x'_n = a, a_1 a_2 \dots a_n$.

4) Fiind dat numărul real $x = a, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots$ atunci rotunjirea lui x la a n -a zecimală se calculează astfel:

a) Dacă $a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, atunci $x_n = a, a_1 a_2 \dots a_n$.

b) Dacă $a_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, atunci $x_n = a, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$.

Aplicații

1) Scrieți pentru $a = \sqrt{3}$ și $b = -\sqrt{3}$:

- a) aproximațiile zecimale de ordinul 2;
- b) trunchierile de ordinul 3;
- c) rotunjirile la a 4-a zecimală.

Soluție. $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$ și $-\sqrt{3} = -1,7320508\dots$.

- a) $a'_2 = 1,73, a''_2 = 1,74$ și $b'_2 = -1,74, b''_2 = -1,73$.
- b) $a'_2 = 1,732$ și $b'_2 = -1,732$.
- c) $a_2 = 1,7321$ și $b_2 = -1,7321$.

1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Axioma lui Arhimede. Pentru orice număr real x , există și este unic numărul întreg n astfel încât $x \in [n, n + 1)$.

Definiție. Fiind dat numărul real x , numim partea întreagă a lui x și o notăm cu $[x]$, cel mai mare număr întreg, care este mai mic sau egal cu x .

Definiție. Fiind dat numărul real x , numim partea fracționară a lui x și o notăm cu $\{x\}$, diferența dintre numărul x și partea lui întreagă ($x - [x]$).

Exemple. $[1,7] = 1, [-2,3] = -3; \{5,2\} = 0,2, \{-3,1\} = 0,9$.

Aplicații

1. Să se calculeze: $[\sqrt{n(n+1)}]$ și $\{\sqrt{n(n+1)}\}$.

Soluție. Se arată că:

$$n \leq \sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n(n+1)} \right] = n.$$

$$\left\{ \sqrt{n(n+1)} \right\} = \sqrt{n(n+1)} - \left[\sqrt{n(n+1)} \right] =$$

$$\sqrt{n(n+1)} - n.$$

2. Fie $x, y \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că:

$$\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$

Soluție: $x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\} \Rightarrow x - y =$
 $= [x] - [y] + \{x\} - \{y\}$. Evident: $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$.

1.1.8 Operații cu intervale de numere reale

Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, definim următoarele submulțimi ale lui \mathbf{R} pe care le numim intervale:

- 1) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - interval închis în a și b
- 2) $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ - interval deschis în a și b
- 3) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval închis în a , deschis în b
- 4) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ - interval deschis în a , închis în b
- 5) $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ - interval închis la stânga în a și nemărginit la dreapta
- 6) $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ - interval deschis la stânga în a și nemărginit la dreapta
- 8) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ - interval nemărginit la stânga și închis la dreapta în b
- 9) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ - interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta în b .

Operațiile cu intervale se definesc la fel ca operațiile cu mulțimi.

Distanța euclidiană dintre numerele reale a și b se definește ca fiind numărul $d(a, b) = |a - b|$.

Aplicații

1. Scrieți sub formă de intervale următoarele mulțimi:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}$ b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\}$.

Soluție. a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\} = (-\infty, 3]$.

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 5\} = (1, 5)$.

2. Să se determine mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\}.$$

Soluție. $d(x, 3) < 5 \Leftrightarrow |x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < x < 8$. Atunci: $\{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 3) < 5\} = (-2, 8)$.

1.1.9 Inegalități

Pentru a demonstra inegalități, ne bazăm pe proprietățile relației de ordine pe mulțimea \mathbf{R} . Se folosesc transformările echivalente și se obține o sumă de pătrate mai mare sau egală cu zero.

a) Inegalități ce pot fi folosite în cadrul demonstrării altor inegalități.

1) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Soluție. $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$.

2) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Soluție. $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

3) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.

Soluție. $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

4) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Soluție. $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

5) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$.

Soluție. $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

6) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

Soluție. $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

7) Dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, atunci avem: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Soluție. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

8) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Soluție. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$.

9) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci avem: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Soluție. Se folosește identitatea 8) de la 1.1.3 b) :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Se înlocuiește a^3 cu a , b^3 cu b și c^3 cu c și se obține inegalitatea

dorită.

10. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2.$$

(Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski)

Soluție. După efectuarea calculelor se obține $(ay - bx)^2 \geq 0$.

11. Dacă $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, atunci avem:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}.$$

(Inegalitatea lui Minkovski)

Soluție. După ridicarea la pătrat se obține inegalitatea:

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by.$$

a) Dacă $ax + by \leq 0$, inegalitatea este evident adevărată.

b) Dacă $ax + by > 0$, ridicând la pătrat ambii membri ai inegalității obținem: $(ay - bx)^2 \geq 0$.

Aplicații

1. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+$ avem:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Soluție. Se aplică inegalitatea **3)** și obținem:

$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$, $\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}$, $\frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}$. Se adună membru cu membru cele trei inegalități.

2. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{R}_+$ avem:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Soluție. Se aplică inegalitatea **8)** pentru numerele reale ab, bc, ca și se obține: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 +$

$$+a^2bc = abc(a + b + c).$$

3. Să se arate că dacă $a, b > 0, a + b = 1$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

$$\text{a) } ab \leq \frac{1}{4} \qquad \text{b) } 2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2.$$

Soluție. a) $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$.

$$\text{b) } 2(a^3 + b^3) \geq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2(a + b)^3 - 6ab(a + b) \geq \\ \geq (a + b)^2 - 2ab \Leftrightarrow 2 - 6ab \geq 1 - 2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4}.$$

4. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0$, atunci sunt adevărate următoarele inegalități:

$$\text{a) } a^2 \geq 4bc \qquad \text{b) } ab + bc + ca \leq 0.$$

Soluție. a) $a^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (-b - c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \geq 4bc \Leftrightarrow (b - c)^2 \geq 0.$

$$\text{b) } ab + bc + ca \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq (a + b + c)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 \geq 0.$$

CUPRINS

Algebră

1	Mulțimi și elemente de logică matematică	3
	1.1 Mulțimea numerelor reale	3
	1.1.1 Numere reale	3
	1.1.2 Operații algebrice cu numere reale	3
	1.1.3 Calcule cu numere reale reprezentate prin litere	4
	1.1.4 Ordonarea numerelor reale	6
	1.1.5 Modulul unui număr real	7
	1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	8
	1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	9
	1.1.8 Operații cu intervale de numere reale	10
	1.1.9 Inegalități	11
	1.2 Elemente de logică matematică	14
	1.2.1 Propoziție, predicat cuantificatori	14
	1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi	16
	1.3 Condiții necesare, condiții suficiente	18
	1.4 Tipuri de raționamente logice	19
2	Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale	23
	2.1 Șiruri	23
	2.2 Progresii aritmetice	23
	2.2.1 Noțiunea de progresie aritmetică	23
	2.2.2 Formula termenului general al progresiei aritmetice	24
	2.2.3 Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice	25
	2.2.4 Alte proprietăți ale progresiilor aritmetice	26

2.3	Progresii geometrice	27
2.3.1	Noțiunea de progresie geometrică	27
2.3.2	Formula termenului general al progresiei geometrice	28
2.3.3	Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice	29
2.3.4	Alte proprietăți ale progresiilor geometrice	29
3	Funcții, lecturi grafice	31
3.1	Noțiunea de funcție	31
3.2	Funcții numerice	32
3.3	Compunerea funcțiilor	34
4	Funcția de gradul I	36
4.1	Ecuția de gradul I	36
4.2	Funcția afină	36
5	Funcția de gradul al doilea	40
5.1	Ecuția de gradul al doilea	40
5.2	Funcția de gradul al doilea	42
6	Mulțimi de numere	47
6.1	Numere reale	47
6.1.1	Puteri cu exponent întreg	47
6.1.2	Radicali	47
6.1.3	Puteri cu exponent rațional	51
6.1.4	Puteri cu exponent real	51
6.2	Logaritmi	52
6.3	Mulțimea numerelor complexe	55
6.3.1	Numere complexe sub formă algebrică	55
6.3.2	Reprezentarea geometrică a numerelor complexe	58
6.3.3	Rezolvarea de ecuații în \mathbb{C}	60
7	Funcții și ecuații	62
7.1	Funcții și ecuații	62

7.1.1	Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate.	
	Funcții inverse	62
7.1.2	Funcția putere cu exponent natural	64
7.1.3	Funcția radical	64
7.1.4	Funcția exponențială	65
7.1.5	Funcția logaritmică	66
7.2	Ecuții	66
7.2.1	Ecuții, inecuații și sisteme de ecuații iraționale	66
7.2.2	Ecuții, inecuații și sisteme de ecuații exponențiale	69
7.2.3	Ecuții, inecuații și sisteme de ecuații logaritmice	71
8	Metode de numărare	74
8.1	Mulțimi finit ordonate	74
8.2	Permutări	75
8.3	Aranjamente	75
8.4	Combinări	75
8.5	Binomul lui Newton	76
9	Elemente de probabilități	78
9.1	Evenimente. Operații cu evenimente	78
9.2	Probabilitatea unui eveniment	79
9.3	Proprietăți ale probabilităților	80
9.4	Probabilități condiționate	80
9.5	Evenimente independente	81
9.6	Schema lui Poisson	81
9.7	Schema lui Bernoulli	82
9.8	Variabile aleatoare	82
10	Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare	85
10.1	Permutări	85
10.2	Matrice	86

10.3	Determinanți	89
10.4	Matrice inversabile	91
10.5	Rangul unei matrice	92
10.6	Sisteme de ecuații liniare	93
11	Structuri algebrice	97
11.1	Legi de compoziție	97
11.2	Grupuri	102
11.3	Inele	107
11.4	Corpuri	110
11.5	Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_p, p$ număr prim)	112

Analiză matematică

1	Limite de funcții	119
1.1	Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală	119
1.1.1	Operații algebrice cu numere reale	119
1.1.2	Ordonarea numerelor reale	120
1.1.3	Modulul unui număr real	120
1.1.4	Operații cu intervale de numere reale	121
1.1.5	Mulțimi mărginite	122
1.1.6	Marginile unei mulțimi	123
1.1.7	Vecinătăți, puncte de acumulare	124
1.2	Funcții reale de variabilă reală	124
1.3	Șiruri de numere reale	125
1.3.1	Noțiunea de șir	125
1.3.2	Limite de șiruri	125
1.3.3	Proprietăți ale șirurilor care au limită	126
1.3.4	Șiruri monotone și mărginite	127
1.3.5	Proprietăți ale șirurilor convergente	128
1.3.6	Calculul limitelor unor șiruri	128

1.3.7	Trecerea la limită în inegalități	129
1.3.8	Criterii de convergență	130
1.3.9	Alte criterii de convergență	124
1.3.10	Lema lui Stolz-Cesaro	135
1.3.11	Numărul e	136
1.3.12	Constanta lui Euler	137
1.3.13	Operații cu șiruri convergente	137
1.3.14	Șiruri definite prin relații de recurență	140
1.4	Limite de funcții	142
1.4.1	Limita unei funcții într-un punct, limite laterale	142
1.4.2	Criterii de limită	146
1.4.3	Operații cu limite de funcții	147
1.4.4	Limite de funcții compuse	149
1.4.5	Limitele funcțiilor elementare	149
1.4.6	Limite remarcabile	156
2	Funcții continue	160
2.1	Studiul continuității în puncte de pe dreapta reală	160
2.2	Operații cu funcții continue	163
2.3	Proprietăți ale funcțiilor continue	167
3	Funcții derivabile	170
3.1	Derivata unei funcții într-un punct	170
3.2	Derivate laterale	172
3.3	Derivatele unor funcții uzuale	175
3.4	Operații cu funcții derivabile	177
3.4.1	Operații algebrice cu funcții derivabile	177
3.4.2	Derivarea funcțiilor compuse	179
3.4.3	Derivarea funcțiilor inverse	179
3.4.4	Formule de derivare a funcțiilor compuse	179
3.4.5	Funcții de n ori derivabile	181
3.5	Funcții derivabile pe un interval	182

	3.5.1	Puncte de extrem	182
	3.5.2	Teorema lui Fermat	182
	3.5.3	Teorema lui Rolle	183
	3.5.4	Teorema lui Lagrange	184
	3.6	Regulile lui l'Hospital	185
4		Reprezentarea grafică a funcțiilor	189
	4.1	Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	189
	4.2	Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	190
	4.3	Asimptotele funcțiilor	191
	4.4	Demonstrarea unor inegalități	194
	4.5	Etapele reprezentării grafice a funcțiilor	197
5		Primitive	201
	5.1	Primitivele unei funcții	201
	5.1.1	Noțiunea de primitivă	201
	5.1.2	Integrala nedefinită	201
	5.1.3	Formule ale integralelor nedefinite	202
	5.2	Metode de integrare	204
	5.2.1	Metoda integrării prin părți	204
	5.2.2	Metoda integrării prin schimbarea de variabilă	206
	5.3	Integrarea funcțiilor raționale	208
	5.3.1	Definirea funcțiilor raționale	208
	5.3.2	Integrarea funcțiilor raționale simple	209
	5.3.3	Integrarea funcțiilor raționale oarecare	212
	5.4	Integrarea funcțiilor trigonometrice	214
6		Integrala definită	216
	6.1	Funcții integrabile	216
	6.1.1	Diviziuni	216
	6.1.2	Sume Riemann, sume Darboux	217
	6.1.3	Noțiunea de integrală definită	217
	6.1.4	Formula lui Leibniz-Newton	219
	6.1.5	Clase de funcții integrabile	220

	6.1.6 Proprietăți ale funcțiilor integrabile . . .	221
7	Metode de calcul pentru integrale definite	223
	7.1 Metoda de integrare prin părți	223
	7.2 Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă	224
8	Aplicații ale integralei definite	225
	8.1 Aria unei suprafețe plane	225
	8.2 Volumul corpurilor de rotație	226

Trigonometrie

	1. Unități de măsură pentru unghiuri și arce	227
	2. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	228
	2.1 Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit al unui triunghi ABC dreptunghic în A	228
	2.2 Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile uzuale ale unui triunghi dreptunghic . . .	228
	2.3 Cazuri de rezolvare a triunghiului drep- tunghic	229
	2.4 Egalități trigonometrice într-un triunghi dreptunghic	230
	2.5 Aplicații	230
	3. Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice.	232
	3.1 Cercul trigonometric	232
	3.2 Funcții trigonometrice	233
	4. Periodicitatea, paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice	236
	4.1 Periodicitatea funcțiilor trigonometrice .	236
	4.2 Paritatea și imparitatea funcțiilor trigono- metrice	237
	5. Reducerea la primul cadran	237
	6. Graficele funcțiilor trigonometrice	239
	7. Formule de legătură între funcțiile trigono-	

metrice	242
8. Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	244
9. Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu și ale jumătății unui unghi	245
10. Transformarea sumei sau diferenței de funcții trigonometrice în produs	249
11. Transformarea produsului de funcții trigonometrice în sumă	250
12. Identități trigonometrice	251
13. Transformarea unei expresii trigonometrice într-un produs de alte expresii trigonometrice	256
14. Expresii care nu depind de parametri	257
15. Funcții trigonometrice inverse	258
16. Inegalități trigonometrice	260
17. Ecuații trigonometrice	261
18. Aplicațiile trigonometriei în algebră	268
18.1 Numere complexe sub formă trigonometrică	268
18.2 Operații cu numere complexe sub formă trigonometrică	269
18.3 Rădăcinile de ordin n ale unui număr complex	271
18.4 Ecuații binome	272
19. Aplicațiile trigonometriei în geometrie	273

Geometrie

1. Paralelism și calcul vectorial	285
1.1 Segmente orientate	285
1.2 Vectori. Operații cu vectori	288
1.3 Descompunerea unui vector după direcții	

date	293
1.4 Vectori coliniari	294
1.5 Vectorul de poziție al unui punct	296
1.6 Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi. Relația lui Sylvester	298
1.7 Teorema lui Menelaus. Teorema lui Ceva.	300
1.8 Produsul scalar a doi vectori	301
2. Elemente de geometrie analitică	303
2.1 Reper cartezian. Coordonate carteziene ..	303
2.2 Coordonatele unui vector. Operații cu vectori în coordonate carteziene	304
2.3 Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat	305
2.4 Ecuații ale dreptei în plan	306
2.5 Coliniaritate, concurență	307
2.6 Paralelism, perpendicularitate	308
2.7 Calcule de distanțe și arii	310