2.3 Progresii geometrice
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție. Un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numeşte **progresie geometrică**, dacă există un număr real q, numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul înmulțit cu q ($b_k = b_{k-1} \cdot q, (\forall)k,\ k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = q, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie geometrică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația q.

Exemplu. a) Șirul dat de 2, 6, 18, 54, 162 este progresie geometrică deoarece $6 = 2 \cdot 3, 18 = 6 \cdot 3,\ 54 = 18 \cdot 3,\ 162 =$ $= 54 \cdot 3.$ Rația progresiei este 3.

2. Formula termenului general al progresiei geometrice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$b_n = b_1 q^{n-1} (\forall)n, n \geq 2.$$

Exemplu. a) Pentru progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}, b_1 = 2,$ $q = 2$, avem: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

3. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Teoremă. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu rația $q \neq 1$ și $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ suma primilor *n* termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, n \geq 1.$$

Exemplu. a) Fiind dată progresia geometrică $1, 2, 4, 8, \cdots$ avem $b_1 = 1,\ q = 2$, iar suma primilor 9 termeni ai săi este:

$$S_9 = 1 \cdot \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 511.$$

4. Alte proprietăți ale progresiilor geometrice

1. Fiind dată progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, are loc relația:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \ (\forall)k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(b_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \ (\forall)k, k \geq 2$$

atunci acest șir este o progresie geometrică.

3. Fiind date numerele $b_1, b_2, \cdots, b_n$ în progresie geometrică are loc relația:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n \ (\forall)k, k \geq 2.$$

b) Teste grilă de autoevaluare

Testul 1

■ **Se acordă 1p din oficiu**

(1p) 1. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ progresia geometrică cu $b_1 = 1$ și rația $q = 3$. Calculați b_5 și arătați că are valoarea:

64 75 81 85 90

(1p) 2. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ progresia geometrică cu $b_1 = 1$ și rația $q = 2$. Calculați S_5 și arătați că are valoarea:

24 25 30 31 32

(1p) 3. Valoarea naturală a lui *x*, astfel încât numerele $x + 1, 4x - 1$, $10x + 5$ să fie în progresie geometrică este:

3 4 5 6 7

(1p) 4. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ progresia geometrică astfel încât $b_4 - b_1 = 7$ și $b_2 b_3 = b_4$. Calculați S_6 și arătați că are valoarea:

61 62 63 64 65

(1p) 5. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ progresia geometrică astfel încât $S_3 = 13$ și $S_4 = 40$. Calculați b_5 și arătați că are valoarea:

80 81 82 83 84

(1p) 6. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ progresia geometrică pozitivă, astfel încât $b_4 + b_1 = 28$ și $b_1 + b_2 = 4$. Calculați S_5 și arătați că are valoarea:

119 120 121 122 123

(1p) 7. Calculați suma $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$ și arătați că este mai mare decât 2 000 cu:

45 46 47 48 49

(1p) 8. Calculați sumele $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{11}$ și $S_2 = 1 + 3 + {}$ $+3^2 + \cdots + 3^7$ arătați că $S_2 - S_1$ este egal cu:

1 945 2 146 3 127 2 465 1 849

(1p) 9. Dacă a, b, c sunt în progresie geometrică aduceți la forma cea mai simplă expresia $(a + c)(b^3 + c^3) - (b^2 + c^2)(ab + c^2)$ și arătați că are valoarea**:** **0 1 2** ***abc*** $\boldsymbol{a + b + c}$

Testul 2

■ **Se acordă 1p din oficiu**

(1) 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ cu $b_1 = 2$ și rația $q = 2$.

Calculați b_5 și S_7 și arătați că $S_7 - b_5$ este egal cu:

218 220 222 224 226

(1) 2. Să se determine progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ pozitivă, știind că $b_2 = 6$ și $b_4 = 54$.

Calculați b_5 și arătați că are valoarea egală cu:

160 161 162 163 164

(1) 3. Fie $(b_n)_{n\geq1}$ o progresie geometrică pozitivă.

Dacă $b_4 = 2$ și $b_2 = 4$ calculați b_6 și arătați că are valoarea:

1 2 3 4 5

(1) 4. Se consideră șirul: 1, 3, 9, 27, 81,⋯.

Determinați rangul termenului 6561 și arătați că are valoarea:

7 8 9 10 11

(1) 5. Să se determine progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ știind că $S_2 = 4$ și $S_3 = 13$. Arătați că rația progresiei este egală cu:

1 2 3 4 5

(1) 6. Să se determine $x \in \mathbf{N}$, astfel încât numerele $x + 1, 4x + 1$, $8x + 11$ să fie în progresie geometrică.

Valoarea lui x este egală cu:

1 2 3 4 5

(1) 7. Dacă numerele a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci calculați expresie: $a^3(b + c)(b^2 + c^2) - b^3(a + b)(a^2 + b^2)$.

Arătați că valoarea ei este egală cu:

0 1 2 3 4

(2) 8. Fie șirul de numere $(b_n)_{n\geq1}, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ suma primilor n termeni ai săi este dată de formula $S_n =$ $= 3n + 1$. Stabiliți dacă șirul $(b_n)_{n\geq1}, n \in \mathbf{N}^*$:

este progresie geometrică **nu este progresie geometrică**

3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții numerice.
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Funcția $f: A \to B$, se numește **funcție numerică**, dacă $A \subset$ **R** și $B \subset$ **R** .

Exemplu. Funcția f : $(0,1) \to (0,+\infty)$ este numerică.

2. Fiind dată funcția $f: A \to B$, se numește **graficul** funcției f mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) | \, x \in A\}$.

3. Fiind dată **funcția numerică** $f: A \to B$ reprezentăm geometric graficul funcției f reprezentând în planul XOY toate punctele $M(x,y) \in \boldsymbol{G_f}$.

Exemplu. Pentru $f: \{0,1,3\} \to \{1,2,3,4\}, f(0) = 1, f(1) = 2, f(3) = 4$ avem: $G_f = \{(0,1),(1,2),(3,4)\}$.

4. Pentru a determina intersecția graficului **funcției numerice** $f: A \to B$ cu axa $\mathrm{O}x$ se rezolvă ecuația $f(x) = 0$. Pentru fiecare rădăcină α a ecuației obținem punctul $A(\alpha, 0)$ de intersecție a graficului cu axa $\mathrm{O}x$.

Exemplu. Pentru funcția $f: (0,+\infty) \to$ **R**, $f(x) = x - 2$, rezolvăm ecuația $x - 2 = 0$ și obținem $x = 2$ și punctul de intersecție cu axa $\mathrm{O}x$ $A(2,0)$.

5. Pentru a determina intersecția graficului **funcției numerice** $f: A \to B$ cu axa $\mathrm{O}y$ se calculează $f(0)$ dacă $0 \in A$ și se obține punctul $A(0, f(0))$.

Exemplu. Pentru funcția $f: (-3,+\infty) \to$ **R**, $f(x) = x + 2$, calculăm $f(0) = 2$ și se obține punctul $A(0,2)$.

6. Soluțiile ecuației $f(x) = g(x)$ reprezintă abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g.

Exemplu. Fiind date funcțiile: f: **R** → **R**, $f(x) = 2x + 3$ și $g; (-3,+\infty), g(x) = x + 7$, determinați punctele de intersecție ale graficelor acestora.

Soluție. Abscisele punctelor de inersecție ale graficelor celor două funcții sunt soluțiile ecuației:
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x + 3 = x + 7 \Rightarrow x = 4.$

Avem: $f(4) = g(4) = 11$ și atunci punctul de intersecție al graficelor este $A(4,11)$.

b) Teste grilă de autoevaluare

Testul 1

■ **Se acordă 1p din oficiu**

(1) 1. Reprezentați grafic funcția: $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 2, 3\}$, $f(x) = x^2 - 1$. Arătați că graficul funcției are un număr de puncte de intersecție cu axele de coordonate egal cu:

0 1 2 3 4

(1) 2. Reprezentați grafic funcția:

$$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, x \in \{-2, -1\} \\ x - 2, x \in \{0, 1, 2\} \end{cases}.$$

Arătați că graficul funcției are un număr de puncte de intersecție cu axele de coordonate egal cu:

0 1 2 3 4

(2) 3. Fie funcțiile: $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 1, g(x) = x^2 - 1$.

Determinați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor *f* și g cu axele de coordonate.

Arătați că graficele funcțiilor *f* și g se intersectează pe axa Ox în punctul: **(0, 0) (−1, 0) (0, 1) (0, −1) (1, 1)**

(1) 4. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Determinați punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate. Numărul lor este egal cu:

0 1 2 3 4

(2) 5. Reprezentați grafic funcția:

$$f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} |x + 1|, x \in \{-2, -1\} \\ |x - 1|, x \in \{-3, 0, 1, 2\} \end{cases}.$$

Arătați că graficul funcției are un număr de puncte de intersecție cu axele de coordonate egal cu: **0 1 2 3 4**

(2) 6. Fie funcțiile: $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x + 1|, g(x) = |x|$.

Determinați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor *f* și g cu axele de coordonate. Arătați că graficele funcțiilor *f* și g se intersectează în punctul:

(0, 0) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **(0, 1) (0, −1) (1, 1)**

Cuprins