

2.3 Progresii geometrice

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție. Un șir $(b_n)_{n \geq 1}$ de numere reale se numește **progresie geometrică**, dacă există un număr real q , numit rație, astfel încât fiecare termen, începând cu al doilea se obține din precedentul înmulțit cu q ($b_k = b_{k-1} \cdot q, (\forall)k, k \geq 2$).

Folosind formula din definiție rezultă relația:

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = q, (\forall)k, k \geq 2.$$

O progresie geometrică este bine determinată de primul termen al său a_1 și rația q .

Exemplu. a) Șirul dat de 2, 6, 18, 54, 162 este progresie geometrică deoarece $6 = 2 \cdot 3, 18 = 6 \cdot 3, 54 = 18 \cdot 3, 162 = 54 \cdot 3$. Rația progresiei este 3.

2. Formula termenului general al progresiei geometrice

Teoremă. Termenul general al progresiei aritmetice $(b_n)_{n \geq 1}$ este dat de formula:

$$b_n = b_1 q^{n-1} (\forall)n, n \geq 2.$$

Exemplu. a) Pentru progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}, b_1 = 2, q = 2$, avem: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

3. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Teoremă. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu rația $q \neq 1$ și $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ suma primilor n termeni ai săi. Atunci este adevărată formula:

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, n \geq 1.$$

Exemplu. a) Fiind dată progresia geometrică 1, 2, 4, 8, ... avem $b_1 = 1, q = 2$, iar suma primilor 9 termeni ai săi este:

$$S_9 = 1 \cdot \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 511.$$

4. Alte proprietăți ale progresiilor geometrice

1. Fiind dată progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$, are loc relația:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \quad (\forall)k, k \geq 2.$$

2. Dacă un șir de numere reale $(b_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \quad (\forall)k, k \geq 2$$

atunci acest șir este o progresie geometrică.

3. Fiind date numerele b_1, b_2, \dots, b_n în progresie geometrică are loc relația:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n \quad (\forall)k, k \geq 2.$$

b) Teste grilă de autoevaluare

Testul 1

■ Se acordă 1p din oficiu

(1p) 1. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ progresia geometrică cu $b_1 = 1$ și rația $q = 3$.

Calculați b_5 și arătați că are valoarea:

64 75 81 85 90

(1p) 2. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ progresia geometrică cu $b_1 = 1$ și rația $q = 2$.

Calculați S_5 și arătați că are valoarea:

24 25 30 31 32

(1p) 3. Valoarea naturală a lui x , astfel încât numerele $x + 1$, $4x - 1$, $10x + 5$ să fie în progresie geometrică este:

3 4 5 6 7

(1p) 4. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ progresia geometrică astfel încât $b_4 - b_1 = 7$ și $b_2 b_3 = b_4$. Calculați S_6 și arătați că are valoarea:

61 62 63 64 65

(1p) 5. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ progresia geometrică astfel încât $S_3 = 13$ și $S_4 = 40$. Calculați b_5 și arătați că are valoarea:

80 81 82 83 84

(1p) 6. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ progresia geometrică pozitivă, astfel încât $b_4 + b_1 = 28$ și $b_1 + b_2 = 4$. Calculați S_5 și arătați că are valoarea:

119 120 121 122 123

(1p) 7. Calculați suma $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$ și arătați că este mai mare decât 2 000 cu:

45 46 47 48 49

(1p) 8. Calculați sumele $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{11}$ și $S_2 = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^7$ arătați că $S_2 - S_1$ este egal cu:

1 945 2 146 3 127 2 465 1 849

(1p) 9. Dacă a, b, c sunt în progresie geometrică aduceți la forma cea mai simplă expresia $(a + c)(b^3 + c^3) - (b^2 + c^2)(ab + c^2)$ și arătați că are valoarea:

0 1 2 abc $a + b + c$

Testul 2

■ Se acordă 1p din oficiu

(1) 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și rația $q = 2$.

Calculați b_5 și S_7 și arătați că $S_7 - b_5$ este egal cu:

218 220 222 224 226

(1) 2. Să se determine progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ pozitivă, știind că $b_2 = 6$ și $b_4 = 54$.

Calculați b_5 și arătați că are valoarea egală cu:

160 161 162 163 164

(1) 3. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică pozitivă.

Dacă $b_4 = 2$ și $b_2 = 4$ calculați b_6 și arătați că are valoarea:

1 2 3 4 5

(1) 4. Se consideră șirul: 1, 3, 9, 27, 81, ...

Determinați rangul termenului 6561 și arătați că are valoarea:

7 8 9 10 11

(1) 5. Să se determine progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ știind că $S_2 = 4$ și $S_3 = 13$. Arătați că rația progresiei este egală cu:

1 2 3 4 5

(1) 6. Să se determine $x \in \mathbf{N}$, astfel încât numerele $x + 1$, $4x + 1$, $8x + 11$ să fie în progresie geometrică.

Valoarea lui x este egală cu:

1 2 3 4 5

(1) 7. Dacă numerele a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci calculați expresie: $a^3(b + c)(b^2 + c^2) - b^3(a + b)(a^2 + b^2)$.

Arătați că valoarea ei este egală cu:

0 1 2 3 4

(2) 8. Fie șirul de numere $(b_n)_{n \geq 1}$, $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ suma primilor n termeni ai săi este dată de formula $S_n = 3n + 1$. Stabiliți dacă șirul $(b_n)_{n \geq 1}$, $n \in \mathbf{N}^*$:

este progresie geometrică

nu este progresie geometrică

3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții numerice.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Funcția $f: A \rightarrow B$, se numește **funcție numerică**, dacă $A \subset \mathbf{R}$ și $B \subset \mathbf{R}$.

Exemplu. Funcția $f: (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ este numerică.

2. Fiind dată funcția $f: A \rightarrow B$, se numește **graficul** funcției f mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

3. Fiind dată **funcția numerică** $f: A \rightarrow B$ reprezentăm geometric graficul funcției f reprezentând în planul XOY toate punctele $M(x, y) \in G_f$.

Exemplu. Pentru $f: \{0, 1, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ avem: $G_f = \{(0, 1), (1, 2), (3, 4)\}$.

4. Pentru a determina intersecția graficului **funcției numerice** $f: A \rightarrow B$ cu axa Ox se rezolvă ecuația $f(x) = 0$. Pentru fiecare rădăcină α a ecuației obținem punctul $A(\alpha, 0)$ de intersecție a graficului cu axa Ox .

Exemplu. Pentru funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 2$, rezolvăm ecuația $x - 2 = 0$ și obținem $x = 2$ și punctul de intersecție cu axa Ox $A(2, 0)$.

5. Pentru a determina intersecția graficului **funcției numerice** $f: A \rightarrow B$ cu axa Oy se calculează $f(0)$ dacă $0 \in A$ și se obține punctul $A(0, f(0))$.

Exemplu. Pentru funcția $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 2$, calculăm $f(0) = 2$ și se obține punctul $A(0, 2)$.

6. Soluțiile ecuației $f(x) = g(x)$ reprezintă abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g .

Exemplu. Fiind date funcțiile: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$ și $g: (-3, +\infty)$, $g(x) = x + 7$, determinați punctele de intersecție ale graficelor acestora.

Soluție. Abscisele punctelor de intersecție ale graficelor celor două funcții sunt soluțiile ecuației:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x + 3 = x + 7 \Rightarrow x = 4.$$

Avem: $f(4) = g(4) = 11$ și atunci punctul de intersecție al graficelor este $A(4, 11)$.

b) Teste grilă de autoevaluare

Testul 1

■ Se acordă 1p din oficiu

(1) 1. Reprezentați grafic funcția: $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 2, 3\}$, $f(x) = x^2 - 1$. Arătați că graficul funcției are un număr de puncte de intersecție cu axele de coordonate egal cu:

0 1 2 3 4

(1) 2. Reprezentați grafic funcția:

$$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in \{-2, -1\} \\ x - 2, & x \in \{0, 1, 2\} \end{cases}.$$

Arătați că graficul funcției are un număr de puncte de intersecție cu axele de coordonate egal cu:

0 1 2 3 4

(2) 3. Fie funcțiile: $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$.

Determinați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g cu axele de coordonate.

Arătați că graficele funcțiilor f și g se intersectează pe axa Ox în punctul: **(0, 0) (-1, 0) (0, 1) (0, -1) (1, 1)**

(1) 4. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Determinați punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate. Numărul lor este egal cu:

0 1 2 3 4

(2) 5. Reprezentați grafic funcția:

$$f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} |x + 1|, & x \in \{-2, -1\} \\ |x - 1|, & x \in \{-3, 0, 1, 2\} \end{cases}.$$

Arătați că graficul funcției are un număr de puncte de intersecție cu axele de coordonate egal cu: **0 1 2 3 4**

(2) 6. Fie funcțiile: $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x + 1|$, $g(x) = |x|$.

Determinați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g cu axele de coordonate. Arătați că graficele funcțiilor f și g se intersectează în punctul:

(0, 0) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (0, 1) (0, -1) (1, 1)

Cuprins

	Enunțuri	Rezolvări
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	161
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	161
1.1.1 Numere raționale	5	161
Testul 1	7	161
Testul 2	8	162
1.1.2 Numere iraționale. Numere reale	9	162
Testul 1	10	162
1.1.3 Operații algebrice cu numere reale.		
Puteri cu exponent întreg	11	164
Testul 1	13	164
Testul 2	14	165
Testul 3	15	165
1.1.4 Ordonarea numerelor reale	16	166
Testul 1	17	166
1.1.5 Modulul unui număr real	18	167
Testul 1	19	167
Testul 2	20	168
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	21	169
Testul 1	22	160
1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a		
unui număr real	23	170
Testul 1	24	170
Testul 2	25	170
1.1.8 Operații cu intervale de numere reale .	26	171
Testul 1	28	171
Testul 2	29	172
1.2 Elemente de logică matematică	30	172
1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori.		
Operații logice elementare	30	172
Testul 1	33	172
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de		
logică matematică cu operațiile și relațiile cu		
mulțimi	34	174
Testul 1	36	174

Testul 2	37	174
Testul 3	38	175
1.2.3 Tipuri de raționamente logice. Metoda reducerii la absurd. Metoda inducției matematice	39	175
Testul 1	40	175
1.2.4 Probleme de numărare	41	177
Testul 1	42	177
1.3 Inegalități	43	177
Testul 1	45	177
1.4 Teste grilă de autoevaluare	46	178
Testul 1	46	178
Testul 2	47	179
Testul 3	48	180
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. Șiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	49	181
2.1 Șiruri	49	181
Testul 1	50	181
2.2 Progresii aritmetice	51	182
Testul 1	53	182
Testul 2	54	183
2.3 Progresii geometrice	55	184
Testul 1	57	184
Testul 2	58	185
2.4 Teste grilă de autoevaluare	59	186
Testul 1	59	186
Testul 2	60	187
Testul 3	61	188
3. Funcții, lecturi grafice	62	188
3.1 Reper cartezian, produs cartezian, drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, $m \in \mathbf{R}$	62	188
Testul 1	63	188
3.2 Noțiunea de funcție, funcții egale. Imaginea unei funcții	64	189
Testul 1	65	189
3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții numerice	66	190
Testul 1	67	190
3.4 Proprietăți ale funcțiilor numerice; mărgi- nire, monotonie	68	191

Testul 1	69	191
3.5 Proprietăți ale funcțiilor numerice; paritate, imparitate, periodicitate	70	192
Testul 1	71	192
3.6 Compunerea funcțiilor	72	193
Testul 1	73	193
Testul 2	74	194
3.7 Teste grilă de autoevaluare	75	195
Testul 1	75	195
Testul 2	76	196
4. Funcția de gradul I	77	197
4.1 Ecuația de gradul I	77	197
Testul 1	78	197
4.2 Funcția afină. Funcția de gradul I. Grafic. Monotonie.	79	198
Testul 1	80	198
4.3 Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I	81	198
Testul 1	83	198
Testul 2	84	199
4.4 Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I	85	201
Testul 1	86	201
Testul 2	87	201
4.5 Sisteme de inecuații de gradul I	88	202
Testul 1	89	202
4.6 Teste grilă de autoevaluare	90	203
Testul 1	90	203
Testul 2	91	204
5. Funcția de gradul al doilea	92	204
5.1 Ecuația de gradul al doilea	92	204
Testul 1	95	204
Testul 2	96	205
Testul 3	97	206
5.2 Funcția de gradul al doilea. Monotonie. Punct de extrem. Intersecția funcției cu axele de coordonate. Graficul funcției	98	207
Testul 1	100	207
Testul 2	101	208
5.3 Semnul funcției de gradul al II-lea. Poziția		

relativă a unei drepte față de o parabolă	102	209
Testul 1	104	209
Testul 2	105	210
5.4 Teste grilă de autoevaluare	106	212
Testul 1	106	212
6. Vectori în plan	107	213
6.1 Segmente orientate	107	213
Testul 1	109	213
6.2 Vectori. Operații cu vectori	110	213
Testul 1	113	213
Testul 2	114	214
6.3 Vectori coliniari. Descompunerea unui vector după doi vectori dați, necoliniari și nenuli	115	215
Testul 1	116	215
Testul 2	117	215
6.4 Coliniaritate, concurență, paralelism. Calcul vectorial în geometria plană	118	216
Testul 1	119	216
Testul 2	120	217
6.5 Teste de evaluare	121	219
Testul 1	121	219
7. Trigonometrie și aplicațiile trigonometriei în geometrie	122	220
7.1 Unități de măsură pentru unghiuri și arce	122	220
Testul 1	123	220
7.2 Rezolvarea triunghiului dreptunghic	124	220
Testul 1	126	220
Testul 2	127	221
7.3 Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice	128	223
Testul 1	132	223
Testul 2	133	224
7.4 Reducerea la primul cadran	134	225
Testul 1	135	225
Testul 2	136	225
Testul 3	137	226
7.5 Formule de legătură între funcțiile trigo- nometrice	138	227
Testul 1	139	227
7.6 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sume și diferenței de unghiuri	140	228

Testul 1	141	228
Testul 2	142	229
7.7 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu, ale jumătății unui unghi	143	231
Testul 1	144	231
Testul 2	145	231
7.8 Calculul lungimii unui segment și a măsurii unui unghi. Aplicațiile trigonometriei în geometrie	146	233
Testul 1	147	233
Testul 2	148	233
Testul 3	149	234
7.9 Teste grilă de autoevaluare	150	235
Testul 1	150	235
Testul 2	151	237
8. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar în geometria plană	152	238
8.1 produsul scalar a doi vectori	152	238
Testul 1	153	238
8.2 Aplicații ale trigonometriei în geometrie. teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Calcularea razei cercului înscris, cercului circumscris și exînscris în triunghi. Calcul de arii	154	239
Testul 1	156	240
Testul 2	157	240
Testul 3	158	242
8.3 Teste grilă de autoevaluare	159	243
Testul 1	159	243
Testul 2	160	244