1.2 Mulțimea numerelor complexe
1.2.1 Numere complexe sub formă algebrică. Conjugatul unui număr complex. Operații cu numere complexe.
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Mulțimea numerelor complexe este:

$$\{z = x + yi \mid x, y \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}.$$

Scrierea $z = x + yi$ se numește **forma algebrică** a numărului complex z. Numărul $x \in \mathbf{R}$ se numește **partea reală** a lui z și se notează **Re** z, iar numărul $y \in \mathbf{R}$ este coeficientul **părții imaginare** a lui z și se notează **Im** z.

Exemplu. Pentru numărul complex $2 + 3i$, 2 este partea reală și 3 este coeficientul părții imaginare.

2. Conjugatul unui număr complex

Fiind dat numărul complex $z = x + yi$, numărul $\bar{z} = x - yi$ se numește **conjugatul numărului** complex z.

Exemple. Conjugatul lui $3 + i$ este $3 - i$ și conjugatul lui $2 - i$ este $2 + i$.

3. Egalitatea a două numere complexe

Două numere complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$ sunt **egale** dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Exemplu. Numerele complexe $x + 1 + yi$ și $2x + (2y - 1)i$ sunt egale dacă $x + 1 = 2x$ și $y = 2y - 1$, adică $x = 1, y = 1$.

4. Puterile numărului *i*

Puterile numărului *i* sunt: $i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$
$i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, \cdots$. Pentru $n \in N^*$avem:

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \end{cases}.$$

Exemple. $i^{99} = -i, i^{1000} = 1, i^{2001} = i, i^{2010} = -1.$

5. Operații cu numere complexe

a) Adunarea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, definim:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Exemplu. $(2 + 3i) + (5 - i) = (2 + 5) + (3i - i) = 7 + 2i.$

b) Scăderea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, definim:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Exemplu. $(5 - 2i) - (3 - 5i) = (5 - 3) + (-2 + 5)i =$
$= 2 + 3i.$

c) Înmulțirea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, definim:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$$

Exemplu. $(3 - i)(2 + i) = (6 + 1) + (3 - 2)i = 7 + i.$

d) Împărțirea numerelor complexe

Fiind date numerele complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, definim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Exemplu. $\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 - 1 + (1 + 2)i}{4 + 1} =$
$= \frac{1 + 3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} i.$

6. Proprietăți ale numerelor complexe

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$

4) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n.$

5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

6) $\bar{\bar{z}} = z$.

7) $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.

8) $z \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Exemple. a) Fiind date $z_1 = 1 + i$ și $z_2 = 2 - i$, atunci
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 - i + 2 + i = 3$.
b) Fiind date $z_1 = 2 + i$ și $z_2 = 1 - i$, atunci
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (2 - i) \cdot (1 + i) = 2 - i + 2i - i^2 =$
$= 2 - i + 2i + 1 = 3 + i$.

7. Modulul unui număr complex

Modulul numărului complex $z = x + yi$ este numărul pozitiv

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemplu. Pentru $z = 3 + 4i$, $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

8. Proprietăți ale modulului unui număr complex

1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
3) $|z^n| = |z|^n$.
4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
5) $|z| = |\bar{z}|$.
6) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
7) $\mathrm{z} \cdot \bar{\mathrm{z}} = |\mathrm{z}|^2$ – caz particular – $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

b) Teste grilă de autoevaluare
Testul 1

■ **Se acordă 1p din oficiu**

(1) 1. Valoarea calculului:

$$(4+i)+(3-2i)+(2+2i)$$

este:

$\mathbf{2-i}$ $\mathbf{2+i}$ $\mathbf{3-i}$ $\mathbf{9+i}$ $\mathbf{7-i}$

(1) 2. Valoarea calculului $(2+i)(3-i)$ este:

$\mathbf{1-i}$ $\mathbf{1+i}$ $\mathbf{2-i}$ $\mathbf{3+i}$ $\mathbf{7+i}$

(1) 3. Valoarea calculului:

$$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$$

este:

$\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{i-1}$ $\boldsymbol{i+2}$

(1) 4. Valoarea calculului $\frac{i+2}{i+1}$ este:

$\boldsymbol{\frac{1+i}{2}}$ $\boldsymbol{\frac{-1+i}{2}}$ $\boldsymbol{\frac{2+i}{2}}$ $\boldsymbol{\frac{2-i}{2}}$ $\boldsymbol{\frac{3-i}{2}}$

(1) 5. Valoarea calculului $\frac{1+i}{2-i}+\frac{1-i}{2+i}$ este:

$\boldsymbol{\frac{1}{5}}$ $\boldsymbol{\frac{2}{5}}$ $\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\boldsymbol{\frac{1+i}{5}}$

(1) 6. Valoarea calculului $(2+i)^3$ este:

$\boldsymbol{2+6i}$ $\boldsymbol{1+5i}$ $\boldsymbol{-2+12i}$ $\boldsymbol{-4+i}$ $\boldsymbol{2+11i}$

(1) 7. Valoarea calculului $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ este:

$\mathbf{-2}$ $\mathbf{-1}$ $\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\mathbf{2}$

(1) 8. Fie $z_1=2+i$ și $z_2=3+2i$. Calculați $\overline{z_1}+\overline{z_2}$ și arătați că are valoarea:

$\boldsymbol{2+i}$ $\boldsymbol{4+i}$ $\boldsymbol{5+2i}$ $\boldsymbol{4+i}$ $\boldsymbol{5-3i}$

(1) 9. Fie $z_1=2+i$ și $z_2=1+i$. Calculați $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ și arătați că are valoarea: $\boldsymbol{\frac{1+2i}{2}}$ $\boldsymbol{\frac{2+i}{2}}$ $\mathbf{0}$ $\mathbf{-1}$ $\boldsymbol{\frac{3+i}{2}}$

Testul 2

■ **Se acordă 1p din oficiu**

(1) 1. Valoarea calculului:

$$(2+i)+(4-3i)-(1-4i)$$

este:

$\mathbf{2+i}$ $\mathbf{2}$ $\mathbf{1-i}$ $\mathbf{5+2i}$ $\mathbf{5}$

(1) 2. Valoarea calculului:

$$(1+i)(2+i)(3+i)$$

este:

$\mathbf{9i}$ $\mathbf{10i}$ $\mathbf{11i}$ $\mathbf{12i}$ $\mathbf{13i}$

(1) 3. Valoarea calculului:

$$i^2+i^4+i^6+i^8$$

este:

$\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\mathbf{2}$ $\mathbf{i}$ $\mathbf{2i}$

(1) 4. Valoarea calculului $\frac{i+1}{2-i}$ este:

$\mathbf{\frac{1+2i}{5}}$ $\mathbf{\frac{1+i}{4}}$ $\mathbf{\frac{1+3i}{5}}$ $\mathbf{\frac{2+i}{3}}$ $\mathbf{\frac{3+i}{2}}$

(1) 5. Valoarea calculului $\frac{1+2i}{1-i}+\frac{1-2i}{1+i}$ este:

$\mathbf{\frac{1-2i}{2}}$ $\mathbf{\frac{1+i}{2}}$ $\mathbf{0}$ $\mathbf{-1}$ $\mathbf{\frac{1-i}{2}}$

(1) 6. Valoarea calculului $(1+i)^2+(1-i)^2$ este:

$\mathbf{i}$ $\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $\mathbf{1+i}$ $\mathbf{2}$

(1) 7. Valoarea calculului $(1+2i)^2+(2+i)^2$ este:

$\mathbf{2i}$ $\mathbf{4i}$ $\mathbf{6i}$ $\mathbf{8i}$ $\mathbf{10i}$

(1) 8. Fie $z_1=\sqrt{3}+i$ și $z_2=\sqrt{5}+2i$. Calculați $|z_1|+|z_2|$ și arătați că are valoarea: **1** **2** **3** **4** **5**

(1) 9. Fie $z_1=2+i$ și $z_2=1+3i$. Calculați $|z_1+z_2|$ și arătați că are valoarea: **1** **2** **3** **4** **5**

2.5 Funcții trigonometrice directe și inverse
2.5.1 Funcții trigonometrice directe
a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Sinusul unui unghi x reprezintă ordonata punctului unde latura finală a unghiului intersectează cercul trigonometric.

a) **Domeniul de definiție** al funcției $f(x) = \sin x$ este **R**.

Deci: sin: **R** $\rightarrow$ $[-1, 1]$

b) **Paritate, imparitate**. Funcția sinus este **impară**, deoarece $\sin\ (-x) = -\sin x$, pentru orice $x \in$ **R**.

c) **Periodicitate**. Funcția sinus este periodică, având perioada principală $T_0 = 2\pi$. Mulțimea perioadelor funcției este $\{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Avem deci egalitatea: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, pentru orice $x \in$ **R**.

d) **Monotonie**.

Pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția sinus este crescătoare de la 0 la 1.

Pe $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ funcția sinus este descrescătoare de la 1 la -1.

Pe $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ funcția sinus este descrescătoare de la -1 la 0.

Pentru alte intervale din **R**, monotonia funcției sinus se stabilește ținând cont de periodicitate.

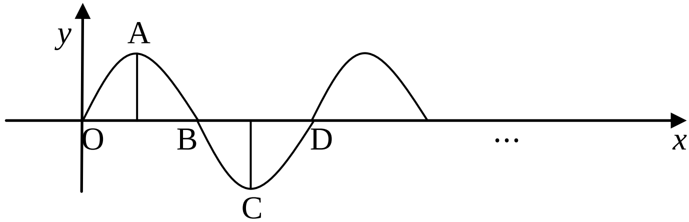
Graficul funcției sinus

Deoarece funcția **sinus** este periodică de perioadă principală 2π, este suficient să reprezentăm graficul funcției **sinus** pe intervalul $[0, 2\pi]$ și-l putem prelungi apoi prin periodicitate pe **R**.

Pentru reprezentarea grafică folosim tabelul cu monotonia funcției

Puncte de bază $O(0,0), A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), B(\pi, 0), C\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), D(2\pi, 0)$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



2. Cosinusul unui unghi x reprezintă abscisa punctului unde latura finală a unghiului intersectează cercul trigonometric.

a) **Domeniul de definiție** al funcției $f(x) = \cos x$ este **R**.

Deci: $\cos: \mathbf{R} \to [-1, 1]$

b) **Paritate, imparitate**. Funcția cosinus este **pară**, deoarece $\cos(-x) = \cos x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

c) **Periodicitate**. Funcția sinus este periodică, având perioada principală $T_0 = 2\pi$. Mulțimea perioadelor acestei funcții este $\{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Avem deci egalitatea: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

d) **Monotonie**.

Pe $[0, \pi]$ funcția cosinus este descrescătoare de la 1 la -1.

Pe $[\pi, 2\pi]$ funcția cosinus este crescătoare de la -1 la 1.

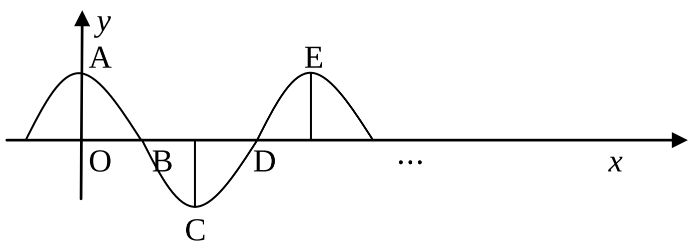
Pentru alte intervale din **R**, monotonia funcției cosinus se stabilește ținând cont de periodicitate.

Graficul funcției cosinus

Deoarece funcția **cosinus** este periodică de perioadă principală 2π, este suficient să reprezentăm graficul funcției **cosinus** pe intervalul $[0, 2\pi]$ și-l putem prelungi apoi prin periodicitate pe **R**.

Pentru reprezentarea grafică folosim tabelul cu monotonia funcției **cosinus**. Vom lua ca puncte de bază ale graficului $A(0,1), B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $C(\pi, -1), D\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), E(2\pi, 1)$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



3. Tangenta unui unghi x reprezintă ordonata punctului unde latura finală a unghiului intersectează axa tangentelor.

a) **Domeniul de definiție** al funcției $f(x) = \operatorname{tg} x$ este $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Deci: tg : $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R}$

b) **Paritate, imparitate**. Funcția tangentă este **impară**, deoarece $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

c) **Periodicitate**. Funcția tangentă este periodică, având perioada principală $T_0 = \pi$. Mulțimea perioadelor funcției este $\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Avem deci egalitatea: $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

d) **Monotonie**.

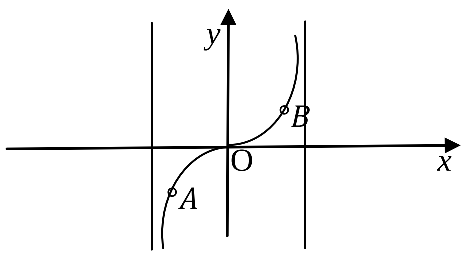
Pe fiecare interval de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$ funcția tangent este crescătoare.

Graficul funcției tangentă

Deoarece funcția **tangentă** este periodică de perioadă principală π, este suficient să reprezentăm graficul funcției **tangentă** pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și-l putem prelungi apoi prin periodicitate pe **R**.

Pentru reprezentarea grafică folosim tabelul cu monotonia funcției **tangentă**. Vom lua ca puncte de bază ale graficului $A\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$, $B\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \vert$



4. Cotangenta unui unghi x reprezintă abscisa punctului unde latura finală a unghiului intersectează axa cotangentelor.

a) **Domeniul de definiție** al funcției $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este $\mathbf{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Deci: ctg : $\mathbf{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

b) **Paritate, imparitate**. Funcția cotangentă este **impară**, deoarece $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

c) **Periodicitate**. Funcția cotangentă este periodică, având perioada principală $T_0 = \pi$. Mulțimea perioadelor funcției este $\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Avem deci egalitatea: $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

d) **Monotonie**.

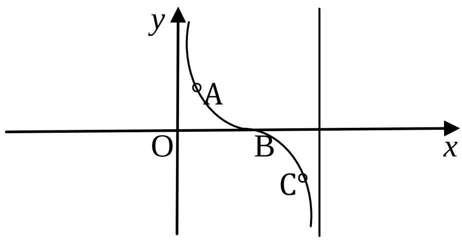
Pe fiecare interval de forma $(k\pi,\ (k+1)\pi)$, unde $k \in \mathbf{Z}$ funcția cotangentă este descrescătoare.

Graficul funcției cotangentă

Deoarece funcția **cotangentă** este periodică de perioadă principală π, este suficient să reprezentăm graficul funcției **cotangentă** pe intervalul $(0,\ \pi)$ și-l putem prelungi apoi prin periodicitate pe **R**.

Pentru reprezentarea grafică folosim tabelul cu monotonia funcției **cotangentă**. Vom lua ca puncte de bază ale graficului $A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\operatorname{ctg} x$	$\mid +\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \mid$



b) Teste grilă de autoevaluare
Testul 1

■ **Se acordă 1p din oficiu**

(1) 1. Domeniul maxim de definiție al funcției $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ este:

$[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ $[\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$ $\mathbf{R} - \{\boldsymbol{k\pi}\}$ $[\mathbf{1}, \boldsymbol{\pi}]$ $[\mathbf{1}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$

(1) 2. Studiați paritatea și imparitatea funcțiilor următoare:

a) $f(x) = x^2 + \cos x$ b) $f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

c) $f(x) = x + \sin^3 x$ d) $f(x) = \sin 3x + \mathrm{tg}^3 x$.

Numărul funcțiilor pare este egal cu:

0 **1** **2** **3** **4**

(1) 3. Cea mai mică valoare $k \in \mathbf{N}$, astfel încât $2\sin x + 3 \leq k$ este:

2 **3** **4** **5** **6**

(1) 4. Arătați că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin 2x - \sin x$ este:

pară **impară** **nici pară nici impară**

(1) 5. Determinați perioada principală a funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) =$
$= \sin 3x + 1$. Ea este egală cu:

$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$

(1) 6. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + 2$. Calculați $\mathrm{Im}\, f$ și arătați că este egală cu:

$[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$ $[\mathbf{0}, \mathbf{3}]$ $[\mathbf{1}, \mathbf{2}]$ $[\mathbf{1}, \mathbf{3}]$

(1) 7. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ pe un interval egal cu perioada ei principală. Calculați $f(0) + f(\pi) + f(2\pi)$ și arătați că are valoarea:

−2 **−1** **0** **1** **2**

(2) 8. Perioada principală a funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin 3x + 4$ este egală cu:

$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$

Testul 2

■ **Se acordă 1p din oficiu**

(1) 1. Domeniul maxim de definiție al funcției $f(x) = \sin(x+4)$ este:

$[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ $[\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$ **R** $[\mathbf{1}, \boldsymbol{\pi}]$ $[\mathbf{1}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$

(1) 2. Determinați domeniile de definiție ale funcțiilor:

a) $f(x) = \sin(2x+1)$ b) $f(x) = \cos(3x-1)$

c) $f(x) = \mathrm{tg}(x+2)$ d) $f(x) = \mathrm{ctg}(x-3)$.

Numărul de funcții care au domeniul de definiție **R** este:

0 **1** **2** **3** **4**

(1) 3. Arătați că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + \cos x$ este:

pară **impară** **nici pară nici impară**

(1) 4. Studiați paritatea și imparitatea funcțiilor următoare:

a) $f(x) = x^2 + \mathrm{tg}^2\, x$ b) $f(x) = 1 + \sin x + \sin^2 x$

c) $f(x) = x^3 + \mathrm{tg}\, x$ d) $f(x) = \sin 3x + \mathrm{tg}\, x$.

Numărul funcțiilor impare este egal cu:

0 **1** **2** **3** **4**

(1) 5. Cea mai mică valoare $k \in \mathbf{N}$, astfel încât $3\cos x - 1 \leq k$ este:

2 **3** **4** **5** **6**

(1) 6. Cea mai mare valoare $k \in \mathbf{Z}$, astfel încât $4\sin x + 3 \geq k$ este:

$\mathbf{-2}$ $\mathbf{-1}$ **0** **1** **2**

(1) 7. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3\cos x + 1$. Calculați $\mathrm{Im}\, f$ și arătați că este egală cu:

$[\mathbf{0}, \mathbf{3}]$ $[-\mathbf{2}, \mathbf{2}]$ $[-\mathbf{2}, \mathbf{4}]$ $[\mathbf{1}, \mathbf{4}]$ $[\mathbf{2}, \mathbf{5}]$

(2) 8. Perioada principală a funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \cos 2x - 3$ este egală cu:

$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ $\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ $\boldsymbol{\pi}$ $\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$

Testul 3

■ **Se acordă 1p din oficiu**

(1) 1. Arătați că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + \cos x$ este:

pară **impară** **nu este nici pară nici impară**

(1) 2. Studiați paritatea și imparitatea funcțiilor următoare:

a) $f(x) = x + \sin x$ b) $f(x) = \cos x + \cos 2x$

c) $f(x) = x^3 + \sin^3 x$ d) $f(x) = x + 1 + \sin 3x$.

Numărul funcțiilor care nu sunt nici pare nici impare este egal cu:

0 **1** **2** **3** **4**

(1) 3. Determinați perioada principală a funcției trigonometrice:

$f: \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R}, f(x) = 2\operatorname{tg} x + 1.$

Valoarea ei este egală cu:

0 **1** $\boldsymbol{\pi}$ $\boldsymbol{2\pi}$ $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(1) 4. Cea mai mare valoare $k \in \mathbf{Z}$, astfel încât $5\cos x + 3 \geq k$ este:

−2 **−1** **0** **1** **2**

(1) 5. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sin x + 2\cos x$. Calculați $\operatorname{Im} f$ și arătați că este egală cu:

$[\mathbf{-1, 3}]$ $[\mathbf{0, 2}]$ $[\mathbf{-3, 3}]$ $[\mathbf{-1, 2}]$ $[\mathbf{1, 3}]$

(1) 6. Perioada principală a funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2\operatorname{tg} x - 1$ este egală cu: $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ $\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$ $\boldsymbol{\pi}$ $\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$

(1) 7. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ pe un interval egal cu perioada ei principală. Calculați $f(0) + f(\pi) + f(2\pi)$ și arătați că are valoarea: **−2** **−1** **0** **1** **2**

(1) 8. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \sin x + 2$ pe un interval egal cu perioada ei principală. Calculați $f(0) + f(\pi) + f(2\pi)$ și arătați că are valoarea: **3** **4** **5** **6** **7**

(1) 9. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \sin 2x$.

Arătați că perioada principală este egală cu:

0 **1** $\boldsymbol{\pi}$ $\boldsymbol{2\pi}$ $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$